Методи за решавање системи линеарни равенки

Системите линеарни равенки (СЛР) можат да се реши повеќе методи

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = b_i \ , \ i=1,2,\cdots,n$$

- Директни методи
  - Гаус-Џорданова елиминација
  - Гаусова елиминација
  - факторизација LU и LDU
  - инверзија на матрица
  - LDL^T, LL^T и Cholesky факторизација за симетрични матрици
- Итеративни методи
  - Јакобиев метод (Гаусов метод)
  - Гаус-Зајделов метод

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{1k}\cdot x_k & + & \cdots & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{2k}\cdot x_k & + & \cdots & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1}\cdot x_1 & + & a_{k2}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{kk}\cdot x_k & + & \cdots & a_{kn}\cdot x_n & = & b_k \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{nk}\cdot x_k & + & \cdots & a_{nn}\cdot x_n & = & b_n
\end{array}$$

Наивна Гаусова елиминација

СЛР може да се реши со помош на постапката за постепена елиминација на непознатите – Гаусова елиминација

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

СЛР има решение ако матрицата $\boldsymbol{A}$ не е сингуларна, т.е. постои инверзна матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ на матрицата $\boldsymbol{A}$ така што е исполенет условот:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

каде што $\boldsymbol{E}$ претставува единична матрица.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \ , \ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{1k} \cdot x_k & + & \cdots & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\
a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{2k} \cdot x_k & + & \cdots & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1} \cdot x_1 & + & a_{k2} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{kk} \cdot x_k & + & \cdots & a_{kn} \cdot x_n & = & b_k \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{nk} \cdot x_k & + & \cdots & a_{nn} \cdot x_n & = & b_n
\end{array}$$

Наивна Гаусова елиминација

Со следните три („елементарни операции“) може да се поедностави СЛР:

- редицата R_i може да го замени местото со редицата R_j
- множење на редицата R_i со скалар $\lambda \neq 0$;
- производот на скалар со редицата R_i ($\lambda \cdot R_i$) може да се додаде на редицата R_j,

$$
\begin{array}{lccccccccc}
R_1: & a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{1k}\cdot x_k & + & \cdots & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\
R_2: & a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{2k}\cdot x_k & + & \cdots & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
R_k: & a_{k1}\cdot x_1 & + & a_{k2}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{kk}\cdot x_k & + & \cdots & a_{kn}\cdot x_n & = & b_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
R_n: & a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{nk}\cdot x_k & + & \cdots & a_{nn}\cdot x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Наивна Гаусова елиминација

Елиминација нанапред

- Од првата равенка

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots a_{1k} \cdot x_k + \cdots a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - \cdots a_{1k} \cdot x_k - \cdots a_{1n} \cdot x_n \right) \qquad x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j \right)$$

- Изразот за x_1 се заменува во останатите равенки

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j \right) + a_{22} \cdot x_2 + \cdots a_{2k} \cdot x_k + \cdots a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$$\frac{a_{k1}}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j \right) + a_{k2} \cdot x_2 + \cdots a_{kk} \cdot x_k + \cdots a_{kn} \cdot x_n = b_k$$

$$\frac{a_{n1}}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot x_j \right) + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots a_{nk} \cdot x_k + \cdots a_{nn} \cdot x_n = b_n$$

Наивна Гаусова елиминација

По средувањето, се добива следниот систем равенки

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots a_{1k}\cdot x_k + \cdots a_{1n}\cdot x_n = b_1$$

$$0\cdot x_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{12}\right)\cdot x_2 + \cdots \left(a_{2k} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{1k}\right)\cdot x_k + \cdots \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{1n}\right)\cdot x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot b_1$$

$$0\cdot x_1 + \left(a_{k2} - \frac{a_{k1}}{a_{11}}\cdot a_{12}\right)\cdot x_2 + \cdots \left(a_{kk} - \frac{a_{k1}}{a_{11}}\cdot a_{1k}\right)\cdot x_k + \cdots \left(a_{kn} - \frac{a_{k1}}{a_{11}}\cdot a_{1n}\right)\cdot x_n = b_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}}\cdot b_1$$

$$0\cdot x_1 + \left(a_{n2} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}\cdot a_{12}\right)\cdot x_2 + \cdots \left(a_{nk} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}\cdot a_{1k}\right)\cdot x_k + \cdots \left(a_{nn} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}\cdot a_{1n}\right)\cdot x_n = b_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}\cdot b_1$$

Наивна Гаусова елиминација

$$a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots a_{1k}\cdot x_k + \cdots a_{1n}\cdot x_n = b_1$$

$$a_{22}\cdot x_2 + \cdots a_{2k}\cdot x_k + \cdots a_{2n}\cdot x_n = b_2$$

$$a_{k2}\cdot x_2 + \cdots a_{kk}\cdot x_k + \cdots a_{kn}\cdot x_n = b_k$$

$$a_{n2}\cdot x_2 + \cdots a_{nk}\cdot x_k + \cdots a_{nn}\cdot x_n = b_n$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{2j} &\leftarrow a_{2j} - \frac{a_{21}}{a_{11}}\cdot a_{1j} \\
a_{kj} &\leftarrow a_{kj} - \frac{a_{k1}}{a_{11}}\cdot a_{1j} \\
a_{nj} &\leftarrow a_{nj} - \frac{a_{n1}}{a_{11}}\cdot a_{1j} \\
b_j &\leftarrow b_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}}\cdot b_1
\end{aligned}\right\}, \ j = 2, \cdots, n$$

Наивна Гаусова елиминација

Елиминацијата на останатите непознати се постигнува со истата постапка како и за првата равенка.

- Равенката преку која што се елиминира непознатата x_k се нарекува „главна равенка“. Кај *наивната* Гаусова елиминација изборот на главната равенка е според редоследот на равенките во системот.

На крајот, се добива следниот систем

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11}\cdot x_1 & +a_{12}\cdot x_2 & \cdots & +a_{1k}\cdot x_k & \cdots & +a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\
0 & a_{22}\cdot x_2 & \cdots & +a_{2k}\cdot x_k & \cdots & +a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & a_{kk}\cdot x_k & \cdots & +a_{kn}\cdot x_n & = & b_k \\
0 & 0 & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}\cdot x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Решението се добива со „повратна замена“

$$
x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\cdot x_j}{a_{ii}}\ ,\ i = n, n-1, \cdots, 2, 1
$$

Наивна Гаусова елиминација

Елиминација напред

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} c = a_{ik}/a_{kk} \\ b_i = b_i - c\cdot b_k \\ \left.a_{ij} = a_{ij} - c\cdot a_{kj}\right\} j = k+1,\cdots,n \end{array}\right\} i = k+1,\cdots,n\end{array}\right\} k = 1,2,\cdots,n-1$$

„повратна замена“

$$x_n = b_n/a_{nn}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_i = b_i \\ \left.x_i = x_i - x_j\cdot a_{ij}\right\} j = i+1,\cdots,n \\ x_i = x_i/a_{ii} \end{array}\right\} i = n-1,n-1,\cdots,2,1$$

```
function X=gauss_n(A,B)
% eliminacija nanapred
n = length(A);
for k = 1 : n - 1
 for i = k + 1 : n
  c = A(i,k) / A(k,k);
  B(i)=B(i) - c * B(k);
  for j=1:n %komentar
   A(i,j)=A(i,j)-c*A(k,j);
  end %for
 end %for
end %for
% povratna zamena
 X(n) = B(n) / A(n,n);
for i = n  - 1: -1 : 1
 X(i) = B(i);
 for j = i + 1 : n
  X(i)=X(i)-A(i,j)*X(j);
 end %for
 X(i) = X(i) / A(i,i);
end %for
```

Наивна Гаусова елиминација

Пример 2.2

$$\begin{array}{rrrrcr} 6x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 16 \\ 12x_1 & -8x_2 & +6x_3 & +10x_4 & = & 26 \\ 3x_1 & -13x_2 & +9x_3 & +3x_4 & = & -19 \\ -6x_1 & +4x_2 & +x_3 & -18x_4 & = & -34 \end{array}$$

```
pr_slr.txt
Primer 2.2
4
 6  -2  2   4  16
12  -8  6  10  26
 3 -13  9   3 -19
-6   4  1 -18 -34
```

```
function [n,A,B,kom]=read_srl(infile)
% citanje na sistemot ravenki
% od datotekata infile
fid = fopen(infile,'r');
%procitaj linija za komentar
kom = fgetl(fid);
%citanje na matricata na sistemot
ravenki i slobodniot vektor
n = fscanf(fid,'%d',1);
A = zeros(n,n);
B = zeros(1,n);
for i = 1 : n
% vo sekoja redica ima n+1 podatok
% (A(i,j), j=1:n) i B(i)
  A(i,1:n) = fscanf(fid,'%f',n);
  B(i) = fscanf(fid,'%f',1);
end %for
```

Наивна Гаусова елиминација

Пример 2.2

pr_slr.txt

```
Primer 2.2
4
 6  -2  2   4  16
12  -8  6  10  26
 3 -13  9   3 -19
-6   4  1 -18 -34
```

```
function slr(infile,metod)
%program za resavanje na sistem linearni
ravenki so razni metodi
[n, A, B,kom] = read_slr(infile)
disp([kom ' ' metod]);
A, B
switch lower(metod)
 case 'gnaive'
  X = gauss_n(A,B)
 case 'gpivot'
  X = gauss_p(A,B)
 case 'lu'
  LU = LU_faktori(A)
  X = LU_slr(LU,B)
 case 'ldlt'
  [LDLT, D] = LDLt_faktori(A)
  X = LU_slr(LDLt,D,B)
 case 'inv'
  A1 = inv(A)
  X = A1 * B
otherwise
  X = (A\B')'
end %switch
```

Наивна Гаусова елиминација

$$\begin{array}{rrrrcr} 6x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 16 \\ 12x_1 & -8x_2 & +6x_3 & +10x_4 & = & 26 \\ 3x_1 & -13x_2 & +9x_3 & +3x_4 & = & -19 \\ -6x_1 & +4x_2 & +x_3 & -18x_4 & = & -34 \end{array}$$

k=1

$$\begin{array}{rrrrcr} 6x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 16 \\ & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & -6 \\ & -12x_2 & +8x_3 & +1x_4 & = & -27 \\ & +2x_2 & +3x_3 & -14x_4 & = & -18 \end{array}$$

k=2

$$\begin{array}{rrrrcr} 6x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 16 \\ & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & -6 \\ & & +2x_3 & -5x_4 & = & -9 \\ & & +4x_3 & -13x_4 & = & -21 \end{array}$$

k=3

$$\begin{array}{rrrrcr} 6x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = & 16 \\ & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & -6 \\ & & +2x_3 & -5x_4 & = & -9 \\ & & & -3x_4 & = & -3 \end{array}$$

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{j=3}^{4} a_{2j} \cdot x_j}{a_{22}} = \frac{-6 - \left[2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1\right]}{-4} = 1$$

$$x_3 = \frac{b_3 - \sum_{j=4}^{4} a_{3j} \cdot x_j}{a_{33}} = \frac{-9 - (-5) \cdot 1}{2} = -2$$

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{4} a_{1j} \cdot x_j}{a_{11}} = \frac{16 - \left[(-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1\right]}{6} = 3$$

Наивна Гаусова елиминација

```
>> [A, B, X]=slr('pr_slr.txt','gnaive')
Primer 2.2 gnaive
   6.00  -2.00   2.00   4.00  16.00
  12.00  -8.00   6.00  10.00  26.00
   3.00 -13.00   9.00   3.00 -19.00
  -6.00   4.00   1.00 -18.00 -34.00
Eliminacija nanapred
 cekor= 1
   6.00  -2.00   2.00   4.00  16.00
   0.00  -4.00   2.00   2.00  -6.00
   0.00 -12.00   8.00   1.00 -27.00
   0.00   2.00   3.00 -14.00 -18.00
 cekor= 2
   6.00  -2.00   2.00   4.00  16.00
   0.00  -4.00   2.00   2.00  -6.00
   0.00   0.00   2.00  -5.00  -9.00
   0.00   0.00   4.00 -13.00 -21.00
 cekor= 3
   6.00  -2.00   2.00   4.00  16.00
   0.00  -4.00   2.00   2.00  -6.00
   0.00   0.00   2.00  -5.00  -9.00
   0.00   0.00   0.00  -3.00  -3.00
Povratna zamena
X( 4)=  -3.00/ -3.00=   1.00
X( 3)=[ -9.00 - ( + -5.00*  1.00)]/  2.00=  -2.00
X( 2)=[ -6.00 - ( +  2.00* -2.00 +  2.00*  1.00)]/ -4.00=   1.00
X( 1)=[ 16.00 - ( + -2.00*  1.00 +  2.00* -2.00 +  4.00*  1.00)]/  6.00=   3.00
A =
     6    -2     2     4
    12    -8     6    10
     3   -13     9     3
    -6     4     1   -18
B =
    16    26   -19   -34
X =
     3     1    -2     1
```

Наивна Гаусова елиминација

Пример 2.3

$$
\begin{array}{rrrrcr}
2x_1 & & -4x_3 & -2x_4 & = & -6 \\
13x_1 & +4x_2 & -10x_3 & -3x_4 & = & -13 \\
 & 3x_2 & +2x_3 & -15x_4 & = & -53 \\
5x_1 & +x_2 & -9x_3 & -7x_4 & = & -20
\end{array}
$$

pr_srl.dat

```
Primer 2.3
4
 2  0  -4  -2  -6
 3  4 -10  -3 -13
 0  3   2 -15 -53
 5  1  -9  -7 -20
```

$$
\begin{array}{rrrrcr}
2x_1 & & -4x_3 & -2x_4 & = & -6 \\
 & 4x_2 & -4x_3 & & = & -4 \\
 & & 5x_3 & -15x_4 & = & -50 \\
 & & & 4x_4 & = & 16
\end{array}
$$

$$
x_1 = 5 \\
x_2 = 1 \\
x_3 = 2 \\
x_4 = 4
$$

Наивна Гаусова елиминација

Карактеристики на методот:

+ многу едноставен за програмирање
+ по правило, побрз во споредба со методот со инверзија на матрицата
– ако е потребно да се реши проблем во кој што се менува само векторот на познатите големини (струи), а не се менува матрицата на коефициентите (елементите од мрежата), за секоја пресметка треба да се спроведе постапката за елиминација
– ако во чекорот k вредноста на коефициентот a_{kk} е еднаква на нула не дава решение, иако за системот равенки има еднозначно решение
– ако a_{kk} има многу мала вредност методот или не доведува до решение или решението е погрешно!
  редоследот на пишување на равенките може да влијае врз тоа дали ќе се добие решени на СЛР

$$\begin{aligned} 0x_1 &+ x_2 = 1 \\ x_1 &+ x_2 = 2 \\ x_1 &= ? \\ x_2 &= ? \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &+ x_2 = 2 \\ & \quad x_2 = 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^{-16} \cdot x_1 &+ x_2 = 1 \\ x_1 &+ x_2 = 2 \\ x_1 &= 2.204 \\ x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &+ x_2 = 2 \\ 10^{-16} \cdot x_1 &+ x_2 = 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Наивна Гаусова елиминација

Карактеристики на методот:

– претходното може да се случи дури и ако дијагоналните елементи на матрицата на ситемот равенки се различни од нула!

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & & = & -6 \\ 3x_1 & -3x_2 & -10x_3 & +4x_4 & = & -13 \\ & -15x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & -53 \\ 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & -10x_3 & +4x_4 & = & -13 \\ & -15x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & -53 \\ 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & & = & -6 \\ 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \end{array}$$

k=1

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & & = & -6 \\ 0 & 0 & -4x_3 & +4x_4 & = & -4 \\ 0 & -15x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & -53 \\ 0 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & -5 \end{array}$$

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 1$$

Гаусова елиминација со избор на „главна равенка“

Методот може да се вгради стратегија за избор на главната равенка со што би се избегнале ситуациите во кои што, во текот на постапката, некој дијагонален елемент би добил вредност нула или блиску до нулата.

Постапката, како и кај наивната Гаусова елиминација, за систем од n линеарни равенки се состои n–1 чекори. Позната е и под името елиминација со „пивотирање“

- во секој чекор k за преостанатите равенки (што не биле одбрани како главни во претходниот процес) се формира векторот $\boldsymbol{S}$ во кој што се сместени максималните коефициенти во соодветните равенки:

$$s_i = \max_{j=i,\cdots,n} |a_{ij}| \ , \ i = k, \cdots, n$$

  - се формира векторот $\boldsymbol{R}$ според следниот израз:

$$r_i = \frac{|a_{ik}|}{s_i} \ , \ i = k, \cdots, n$$

- за главна равенка во чекорот k се одбира равенката со реден број еднаков на индексот i на најголемиот елемент од векторот $\boldsymbol{R}$
- ако $i \neq k$, равенките i и k треба да си ги сменат местата.
- натаму, процесот е идентичен како и кај наивната Гаусова елиминација.

Гаусова елиминација со избор на „главна равенка“

Пример 2.4

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & & = & -6 \\ 3x_1 & -3x_2 & -10x_3 & 4x_4 & = & -13 \\ & -15x_2 & +2x_3 & 3x_4 & = & -53 \\ 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \end{array}$$

pr_slr.txt

```
Primer 2.4
4
 2  -2  -4   0  -6
 3  -3 -10   4 -13
 0 -15   2   3 -53
 5  -7  -9   1 -20
```

k=1

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 15 & 9 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.3000 & 0 & 0.5556 \end{bmatrix}$$

замена на редиците 1 и 4

$$\begin{array}{rrrrcr} 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \\ 3x_1 & -3x_2 & -10x_3 & 4x_4 & = & -13 \\ & -15x_2 & +2x_3 & 3x_4 & = & -53 \\ 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & & = & -6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrcr} 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \\ 0 & -1.2x_2 & -4.6x_3 & 3.4x_4 & = & -1 \\ 0 & -15x_2 & +2x_3 & 3x_4 & = & -53 \\ 0 & -0.8x_2 & -4x_3 & -0.4x_4 & = & -2 \end{array}$$

Гаусова елиминација со избор на „главна равенка“

k=2 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 4.6 & 15.0 & 0.8 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2609 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$

замена на редиците 2 и 3

$$\begin{array}{cccccc} 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \\ 0 & -1.2x_2 & -4.6x_3 & 3.4x_4 & = & -1 \\ 0 & -15x_2 & +2x_3 & 3x_4 & = & -53 \\ 0 & -0.8x_2 & -4x_3 & -0.4x_4 & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \\ 0 & -15x_2 & +2x_3 & 3x_4 & = & -53 \\ 0 & -1.2x_2 & -4.6x_3 & 3.4x_4 & = & -1 \\ 0 & -0.8x_2 & -4x_3 & -0.4x_4 & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \\ 0 & -15x_2 & +2x_3 & 3x_4 & = & -53 \\ 0 & 0 & -4.44x_3 & 3.64x_4 & = & -5.24 \\ 0 & 0 & -0.2933x_3 & -0.24x_4 & = & -0.8267 \end{array}$$

k=3

$$\begin{array}{cccccc} 5x_1 & -7x_2 & -9x_3 & +x_4 & = & -20 \\ 0 & -15x_2 & +2x_3 & 3x_4 & = & -53 \\ 0 & 0 & -4.44x_3 & 3.64x_4 & = & -5.24 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4805x_4 & = & -0.4805 \end{array}$$

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = 2$$
$$x_4 = 1$$

Гаусова елиминација со избор на „главна равенка“

Пример 2.5 Сингуларна матрица

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.5 & -0.2 \\ -0.5 & 0.75 & -0.25 \\ -0.2 & -0.25 & 0.45 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.5 \\ 30 \\ -7.25 \end{bmatrix}$$

k=1

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.6667 & 0.4444 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0.7U_1 & -0.5U_2 & -0.2U_3 & = & 100 \\ 0 & 0.3929U_2 & -0.3929U_3 & = & 196.4286 \\ 0 & -0.3929U_2 & 0.3929U_3 & = & 108.5714 \end{array}$$

```
pr_slr.txt
Primer 2.5
 3
 0.7   -0.50   -0.20 -3.5
-0.5    0.75   -0.25 30
-0.2   -0.25    0.45 -7.25
```

k=2 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3929 & 0.3929 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$

замена на редиците 2 и 3

$$\begin{array}{cccccc} 0.7U_1 & -0.5U_2 & -0.2U_3 & = & 100 \\ 0 & -0.3929U_2 & 0.3929U_3 & = & 108.5714 \\ 0 & 0.3929U_2 & -0.3929U_3 & = & 196.4286 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0.7U_1 & -0.5U_2 & -0.2U_3 & = & 100 \\ 0 & -0.3929U_2 & 0.3929U_3 & = & 108.5714 \\ 0 & 0 & 0 & = & -0 \end{array}$$

Поинаква формулација на Гаусовата елиминација

Елиминација напред

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} c = a_{ik}/a_{kk} \\ b_i = b_i - c\cdot b_k \\ a_{ij} = a_{ij} - c\cdot a_{kj} \Big\}\; j = k+1,\cdots,n \end{array}\right\} i = k+1,\cdots,n \end{array}\right\} k = 1,2,\cdots,n-1$$

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Рав.}_1: & a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{1k}\cdot x_k & + & \cdots & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\
\text{Рав.}_2: & a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{2k}\cdot x_k & + & \cdots & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Рав.}_k: & a_{k1}\cdot x_1 & + & a_{k2}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{kk}\cdot x_k & + & \cdots & a_{kn}\cdot x_n & = & b_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Рав.}_n: & a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{nk}\cdot x_k & + & \cdots & a_{nn}\cdot x_n & = & b_n
\end{array}$$

Поинаква формулација на Гаусовата елиминација

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Рав.}_1: & a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{1k}\cdot x_k & + & \cdots & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\
\text{Рав.}_2: & a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{2k}\cdot x_k & + & \cdots & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Рав.}_k: & a_{k1}\cdot x_1 & + & a_{k2}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{kk}\cdot x_k & + & \cdots & a_{kn}\cdot x_n & = & b_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{Рав.}_n: & a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & a_{nk}\cdot x_k & + & \cdots & a_{nn}\cdot x_n & = & b_n
\end{array}
$$

Елиминација напред

$$\left.\text{Рав.}_i - a_{ik}\cdot\text{Рав.}_k\ ,\ i=k+1,\cdots,n\right\}\ k=1,2,\cdots,n-1$$

За $k=1$

$\text{Рав.}_2 - a_{21}\cdot\text{Рав.}_1$

$\text{Рав.}_k - a_{k1}\cdot\text{Рав.}_1$

$\vdots$

$\text{Рав.}_n - a_{n1}\cdot\text{Рав.}_1$

За $k=2$

$\text{Рав.}_3 - a_{32}\cdot\text{Рав.}_2$

$\text{Рав.}_k - a_{k2}\cdot\text{Рав.}_2$

$\vdots$

$\text{Рав.}_n - a_{n2}\cdot\text{Рав.}_2$

За $k=n-1$

$\text{Рав.}_n - a_{n,n-1}\cdot\text{Рав.}_{n-1}$

LU факторизација

Квадратна несингуларна матрица $\boldsymbol{A}$ може да се претстави како производ од две квадратни матрици од ист ред означени како $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{U}$.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U} \qquad \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B} \qquad \sum_{j=1}^{i} l_{ij} \cdot y_j = b_i \;, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} \qquad \sum_{j=i}^{n} u_{ij} \cdot x_i = y_j$$

$$x_i + \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} \cdot x_j = y_i \;, \; i = n, n-1, \cdots, 2, 1$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \cdot y_j}{l_{ii}} \;, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} \cdot x_j \;, \; i = n, n-1, \cdots, 2, 1$$

LU факторизација

По определување на факторите ***L*** и ***U***, СЛР се решава во две фази

1. фаза: од равенката се определува (помошниот) вектор ***Y***

$$\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\cdot y_j}{l_{ii}} \quad , i=1,2,\cdots,n$$

2. фаза: од равенката се определува непознатиот вектор ***X***

$$\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\cdot x_j \quad , i=n,n-1,\cdots,2,1$$

LU факторизација

Факторите ***L*** и ***U*** на матрицата ***A*** се определуваат од следните изрази:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} + l_{ii} \cdot u_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} \qquad l_{ik} = 0 \text{ за } k > i \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj} + l_{ii} \cdot u_{ij}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \ , \ i \geq j$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} + l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=j+1}^{n} l_{ik} \cdot u_{kj} \qquad u_{kj} = 0 \text{ за } k > j \text{ и } u_{jj} = 1 \Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} + l_{ij}$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{ii}} \ , \ i < j$$

LU факторизација

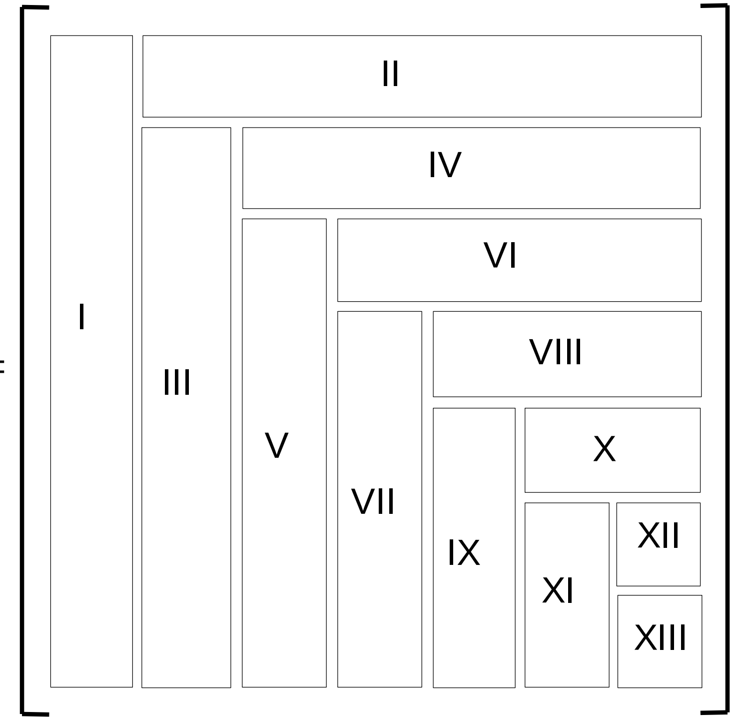
Факторите $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{U}$ на матрицата $\boldsymbol{A}$ можат да се претставaт како елементи од матрицата $\boldsymbol{F}$, при што во еден чекор се определуваат елементите од $\boldsymbol{F}$, т.е. $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{U}$, наизменично колона, па редица:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{E}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \;, i \geq j$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}}{l_{ii}} \;, i < j$$

$\boldsymbol{F} =$



$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{1k} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{2k} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

LU факторизација

За матрица со *n* редици (т.е., колони), процесот се состои од *n* чекори. Секој од овие чекори (освен првиот) се состои од две фази

1 (I); 2(II и III), 3(IV и V), 4(VI и VII)

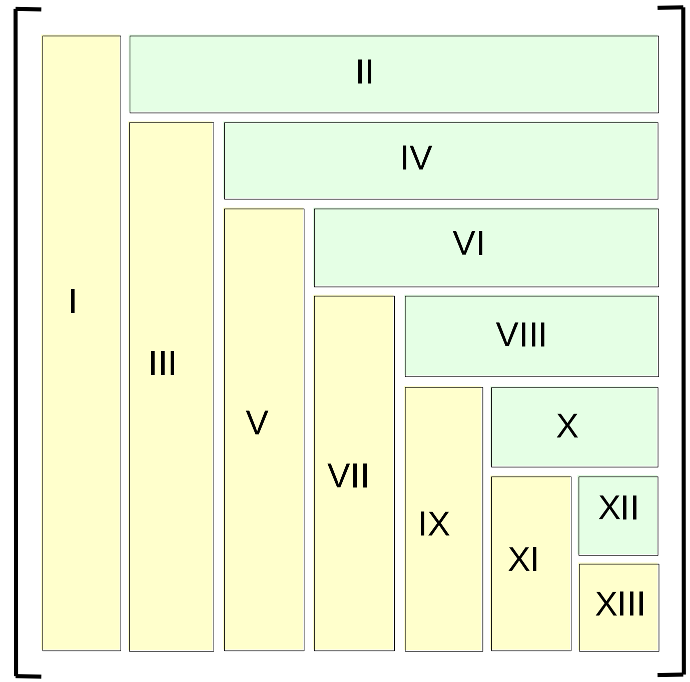
5(VIII и IX), 6(X и XI) и 7(XII и XIII)

$$l_{ij} = f_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} f_{ik} \cdot f_{kj} \;, \; i \geq j \;\; (\mathrm{I}, \mathrm{III}, \cdots, \mathrm{XIII})$$

$$u_{ij} = f_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} f_{ik} \cdot f_{kj}}{f_{ii}} \;, \; i < j \;\; (\mathrm{II}, \mathrm{IV}, \cdots, \mathrm{XII})$$

$$\left. \begin{array}{l} \left. f_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} f_{ik} \cdot f_{kj}}{f_{ii}} \right\} \begin{array}{c} i = 1, \cdots, j-1 \\ (i < j) \end{array} \\[2ex] \left. f_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} f_{ik} \cdot f_{kj} \right\} \begin{array}{c} i = j, \cdots, n \\ (i \geq j) \end{array} \end{array} \right\} j = 1, \cdots, n$$

$F_{7\text{x}7} =$



LU факторизација

Процесот на факторизација се состои од онолку чекори колку што е редот на матрицата $\boldsymbol{A}$.

$$
\left.
\begin{array}{l}
\left. f_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} f_{ik} \cdot f_{kj}}{f_{ii}} \right\} \begin{array}{c} i = 1, \cdots, j-1 \\ (i < j) \end{array} \\[3em]
\left. f_{ij} = a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} f_{ik} \cdot f_{kj} \right\} \begin{array}{c} i = j, \cdots, n \\ (i \geq j) \end{array}
\end{array}
\right\} j = 1, \cdots, n
$$

```
function [LU]=LU_faktori(A)
% opredeluvanje na LU faktori
n = length(A);
LU = A;
for j = 1:n
% presmetka na redica od U
 for i = 1:j-1
  for k = 1:i-1
   LU(i,j)=LU(i,j)-LU(i,k)*LU(k,j);
  end %for k
  LU(i,j)=LU(i,j)/LU(i,i);
 end %for i
% presmetka na kolona od L
 for i = j:n
  for k = 1:j - 1
   LU(i,j)=LU(i,j)-LU(i,k)*LU(k,j);
  end %for k
 end %for i
end %for j
```

LU факторизација

Процесот на „повратна замена“ се состои од две фази:

- во првата фаза се определува помошниот вектор ***Y***
- во втората фаза се пресметува векторот ***X***
  - иста како и кај Гаусовата елиминација

1. фаза

$$\left.\begin{aligned} y_i &= b_i \\ y_i &= y_i - f_{ij}\cdot y_j \Big\}\ j = 1,2,\cdots,i-1 \\ y_i &= y_i / f_{ii} \end{aligned}\right\}\ i = 1,2,\cdots,n$$

2. фаза

$$\left.\begin{aligned} x_i &= y_i \\ x_i &= x_i - f_{ij}\cdot x_j \Big\}\ j = i+1,\cdots,n \end{aligned}\right\}\ i = n,n-1,\cdots,2,1$$

```
function X = LU_slr(LU,B)
% povratna zamena so LU faktori
  n = length(LU);
  for i = 1 : n
% presmetka na Y
    Y(i) = B(i);
    for j = 1:i-1
      Y(i) = Y(i) - LU(i,j)*Y(j);
    end %for
    Y(i) = Y(i)/LU(i,i);
  end %for
 % presmetka na X
  for i = n : -1 : 1
    X(i) = Y(i);
    for j = i + 1 : n
      X(i) = X(i) - LU(i,j)*X(j);
    end %for
  end %for
```

LU факторизација

Карактеристики

+ брзина за решавање на системите линеарни равенки неколку пати поголема од Гаусовата елимнинација
– слично како и кај наивната Гаусова елиминација, во процесот на определување на факторите ***L*** и ***U***, е можно да се добие дијагонален елемент (во ***L***) еднаков (или близок до нулата); потребна е стратегија за избор на главната равенка слично како и кај Гаусовата елиминација со „пивотирање“.

Решавање на системите линеарни равенки со инверзија

$$A \times X = B$$

$$X = A^{-1} \times B$$

```
pr_slr.txt
Primer 2.6
 4
 3  -3 -10   4 -13
 0 -15   2   3 -53
 2  -2  -4   0  -6
 5  -7  -9   1 -20
```

```
>>A, B
A =
     3    -3   -10     4
     0   -15     2     3
     2    -2    -4     0
     5    -7    -9     1
B =
   -13   -53    -6   -20
>>A1 = inv(A)
>>X = A1 * B' % B' = transponiran vektor redica B
>>X = inv(A)*B' % alternativa na prethodnite dve komandi
X =
    5.0000    4.0000    2.0000    1.0000
>>
>> X = (A\B')'
>>
```

Карактеристики

– методот, по правило, е поспор од ***LU*** факторизацијата

Решавање на системите линеарни равенки со инверзија

Постојат повеќе методи за пресметка на инверзна матрица. Некои од нив се:

- детерминанти
- преку решавање на систем равенки
- факторизација
- Шипли-Колман
  - модификацијата на Бетанкур-Торе значително побрза

Метод на Шипли-Колман

```fortran
subroutine INV_SC (nd,n,a)
implicit none
integer(4) nd, n, i, j, k
real(4) a(1:nd,1:nd), akk
do k = 1, n
  a(k,k) = -1. / a(k,k)
  akk = a(k,k)
  do j = 1, n
    if (j .eq. k) cycle
    a(k,j) = a(k,j) * akk
  end do
  do i = 1, n
    if (i .eq. k) cycle
    do  j = 1, n
      if (j .eq. k) cycle
      a(i,j) = a(i,j) + a(i,k)*a(k,j)
    end do
  end do
  do i = 1, n
    if (i .eq. k) cycle
    a(i,k) = a(i,k) * akk
  end do
end do
do i = 1, n
  do j = 1, n
    a(i,j) = -a(i,j)
  end do
end do
end
```

```matlab
function a = INV_SC(a)
n = length(a);
for k = 1:n
  a(k,k) = -1. / a(k,k);
  akk = a(k,k);
  for j = 1:n
    if (j == k), continue, end;
    a(k,j) = a(k,j) * akk;
  end
  for i = 1:n
    if (i == k), continue, end;
    for  j = 1:n
      if (j == k), continue, end;
      a(i,j) = a(i,j) + a(i,k)*a(k,j);
    end
  end
  for i = 1:n
    if (i == k), continue, end;
    a(i,k) = a(i,k) * akk;
  end
end
for i = 1:n
  for j = 1:n
    a(i,j) = -a(i,j);
  end
end
```

Метод на Бетанкур-Торе

```
subroutine INV_BT (nd,n,a)
implicit none
integer(4) nd, n, i, j, k
real(4) a(1:nd,1:nd), b

do k = 1, n
  b = 1. / a(k,k)
  a(k,k) = 1.
  do i = 1, n
    a(i,k) = a(i,k) * b
  end do
  do j = 1, n
    if (j .eq. k) cycle
    b = a(k,j)
    a(k,j) = 0.
    do i = 1, n
      a(i,j) = a(i,j) - a(i,k) * b
    end do
  end do
end do

end
```

```
function a = INV_BT(a)
n = length(A);
for k = 1:n
  b = 1. / a(k,k);
  a(k,k) = 1.;
  for i = 1:n
    a(i,k) = a(i,k) * b;
  end
  for j = 1, n
    if (j == k), continue, end
    b = a(k,j);
    a(k,j) = 0.;
    for i = 1, n
      a(i,j) = a(i,j) - a(i,k) * b;
    end
  end
end
```

Повратна замена со инверзна матрица

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \;\; , \; i = 1, 2, \cdots, n$$

```fortran
subroutine INV_back (nd,n,a,x,b)
implicit none
integer(4) nd, n, i, j, k
real(4) a(1:nd,1:nd), b(1:n), x(1:n)

  do i = 1, n
    x(i) = 0.
    do j = 1, n
      x(i) = x(i) + a(i,j) * b(j)
    end do
  end do

end
```

```matlab
function x = INV_back(a,x,b)
n=length(a);
  for i = 1:n
    x(i) = 0.;
    for j = 1:n
      x(i) = x(i) + a(i,j) * b(j);
    end
  end
```

Решавање на СЛР со симетрични матрици на коефициентите

Факторизација $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \cdot d_{kk}$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\cdot d_{kk}\cdot l_{jk}}{d_{ii}} \;;\; i > j$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & l_{12} & l_{1k} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & 1 & l_{2k} & \cdots & l_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & l_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Решавање на СЛР со симетрични матрици на коефициентите

Повратна замена ($\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{L} = \hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{E}$$

$$\hat{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{E}\right)\times\boldsymbol{D}\times\left(\hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{D}\times\left(\hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{E}\right)\times\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$$

$$\hat{\boldsymbol{L}}\times\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$$

$$\hat{\boldsymbol{L}}\times\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B} - \hat{\boldsymbol{L}}\times\boldsymbol{Y}$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\cdot y_j \ , \ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\boldsymbol{D}\times\left(\hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{D}\times\left(\hat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{Y}$$

$$\hat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}^{-1}\times\boldsymbol{Y}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}^{-1}\times\boldsymbol{Y} - \hat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X}$$

$$x_i = \frac{y_i}{d_{ii}} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij}\cdot x_j \ , \ i = n, , \cdots, 1$$

Решавање на СЛР со симетрични матрици на коефициентите

Повратна замена (**$L\times D\times L^{\mathrm{T}}$**)

$$\left(\hat{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{E}\right)\times\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B} \qquad y_i=b_i-\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}\cdot y_j\ ,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\left(\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\ l_{21}&0&0&\cdots&0\\ l_{31}&l_{23}&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ l_{n1}&l_{n2}&l_{n3}&\cdots&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\times\left(\hat{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{E}\right)^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y} \qquad x_i=\frac{y_i}{d_{ii}}-\sum_{j=i+1}^{n}l_{ij}\cdot x_j\ ,\ i=n,,\cdots,1$$

$$\left(\begin{bmatrix}l_{11}&l_{12}&l_{1k}&\cdots&l_{1n}\\ 0&l_{22}&l_{2k}&\cdots&l_{2n}\\ 0&0&l_{33}&\cdots&l_{3n}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&l_{nn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\ 0&1&0&\cdots&0\\ 0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_{11}&0&0&\cdots&0\\ 0&d_{22}&0&\cdots&0\\ 0&0&d_{33}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&d_{nn}\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$$

Решавање на СЛР со симетрични матрици на коефициентите

Факторизација на Холески (Cholesky) $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{1k} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & l_{2k} & \cdots & l_{2n} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \qquad l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\cdot l_{jk}}{a_{ii}}\ ;\ i > j$$

Решавање на СЛР со симетрични матрици на коефициентите

Повратна замена ($\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

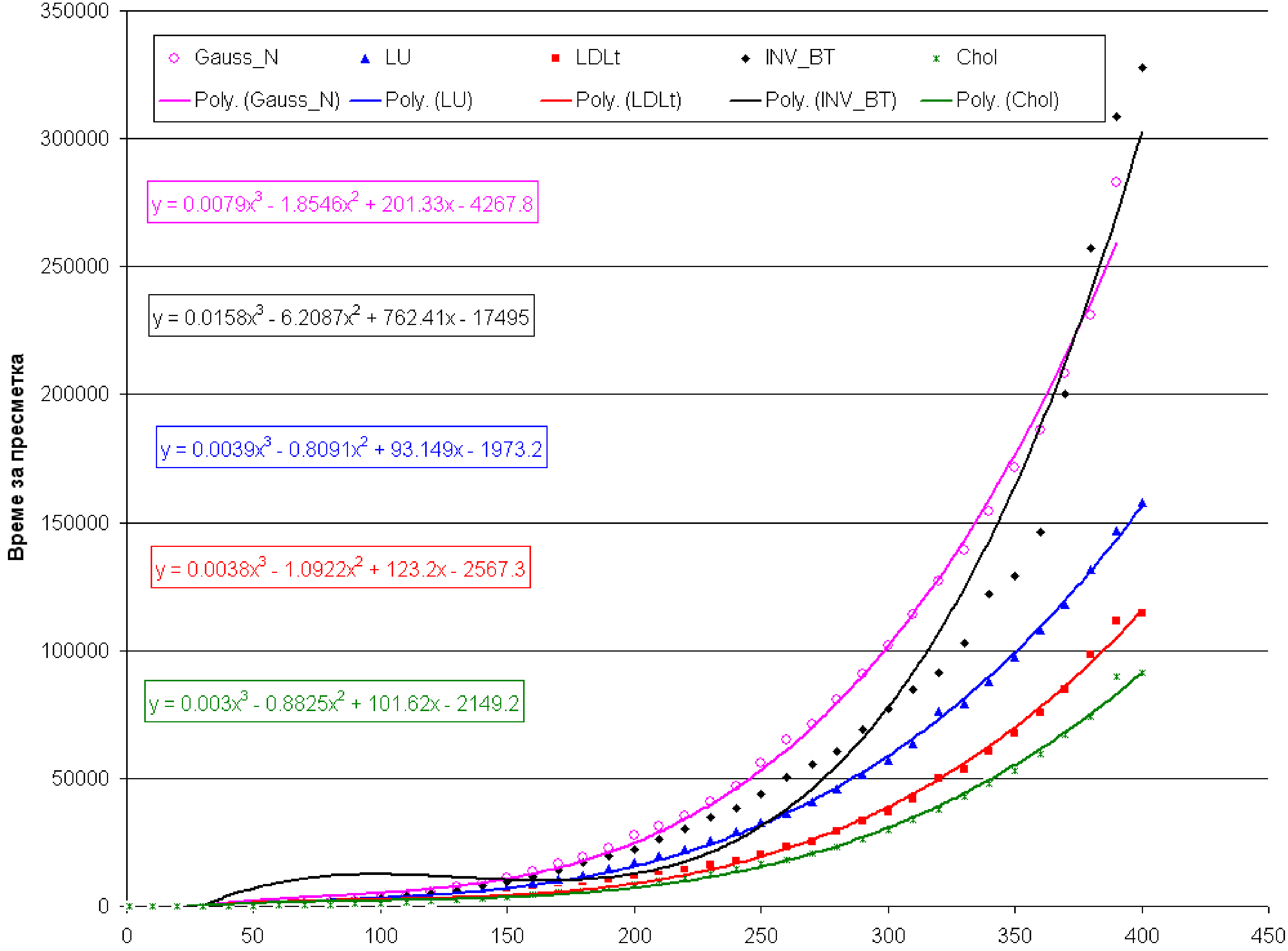
$$\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\times\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{23} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{1k} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & l_{2k} & \cdots & l_{2n} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\cdot y_j \ , \ i = 1, 2, \cdots, n \qquad x_i = \frac{y_i}{l_{ii}} - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij}\cdot x_j \ , \ i = n, n-1, \cdots, 1$$

Споредба на методите за решавање на СЛР



Коментари за директните методи за решавање на СЛР

Општи забелешки

- Се препорачува користење на пивотирање во процесот со цел да се избегнат проблемите со нулти дијагонални елементи и да се намалат грешките при заокружување
- Факторизацијата LU е најбрза за несиметрични СЛР
  - Гаусовата елиминација и инверзијата се околу два пати поспори!
- За симетрични СЛР методот на Холески е најбрз и за него не е потребна стратегија за избор на „главна равенки“
- За СЛР со повеќе стотини непознати се препорачува користење на двојна прецизност со цел да се намалат грешките при заокружување
- Методите за решавање СЛР со факторизација (и инверзија) имаат предност над Гаусовата елиминација особено во случаите кога еден проблем (СЛР) треба да се реши за различни вредности на векторот на познати!

Итеративни методи за решавање на СЛР

Гаусов (Јакобиев) метод

- Поаѓајќи од некое почетно решение на системот равенки, во секоја следна итерација решението е

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - a_{12}\cdot x_2^{(0)} - \cdots - a_{1n}\cdot x_n^{(0)}}{a_{11}} = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\cdot x_j^{(0)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(0)} - \cdots - a_{2n}\cdot x_n^{(0)}}{a_{22}} = \frac{b_2 - a_{21}\cdot x_1^{(0)} - \sum_{j=3}^{n} a_{2j}\cdot x_j^{(0)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{b_3 - a_{31}\cdot x_1^{(0)} - \cdots - a_{3n}\cdot x_n^{(0)}}{a_{33}} = \frac{b_3 - \sum_{j=1}^{2} a_{3j}\cdot x_j^{(0)} - \sum_{j=4}^{n} a_{3j}\cdot x_j^{(0)}}{a_{33}}$$

$$x_i^{(1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\cdot x_j^{(0)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\cdot x_j^{(0)}}{a_{ii}}\ ,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\cdot x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\cdot x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}\ ,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

Итеративни методи за решавање на СЛР

Гаусов-Зајделов метод

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \;, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

Итеративниот процес може да се смета за завршен ако

$$\max_{i=1,2,\cdots,n} \frac{\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|}{\left| x_i^{(k)} \right|} < \varepsilon$$

Општи забелешки

- применлив за СЛР каде што дијагоналните елементи се значително поголеми од вондијагоналните елементи,
- конвергенцијата зависи од изборот на почетното решение,
- несоодветен (лош) избор на почетното решение може да доведе и до дивергенција на итеративните методи
  - почетното решение на СЛР може да биде:

$$x_i^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}} \;, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

Итеративно подобрување на решението на СЛР добиено со директните методи

Се користи за уточнување на решението добиено со некој од директните методи за да се намалат грешките што се јавуваат заради акумулација на грешките при заокружување

Векторот $\boldsymbol{X}$ е точно решение на СЛР

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

Нека $\boldsymbol{X'}=\boldsymbol{X}+\Delta\boldsymbol{X}$ е решението добиено со некој од директните методи

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A} \times \left(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} \right) = \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} \times \left(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} \right) = \boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} \times \Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} \times \Delta\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} \times \Delta\boldsymbol{X} = \Delta\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} \times \Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}$$

$$\Delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} + \boldsymbol{A} \times \Delta\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}$$

$$\Delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times \left(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} \right) - \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} \times \Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \times \left(\boldsymbol{X} + \Delta\boldsymbol{X} \right) - \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} \times \Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X}' - \boldsymbol{B}$$

Итеративно подобрување на решението на СЛР добиено со директните методи

Десната страна на системот равенки по непознатите $\Delta\boldsymbol{X}$ треба да се пресмета со двојна прецизност

- постапката може да се повтори неколку пати, но, во најголем број случаи, е доволно само едно уточнување

$$\boldsymbol{A} \times \Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X}' - \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}' - \Delta\boldsymbol{X}$$