

3 СИМУЛАЦИЈА МОНТЕ КАРЛО

3.1 ОПШТО ЗА МЕТОДОТ НА СИМУЛАЦИЈА

Симулацијата Монте Карло претставува **нумерички метод** или **нумеричка постапка** која служи за **решавање на разни математички задачи** преку моделирање на **случајни величини**. Со неа е можно да се моделира било каков случаен процес врз чиј тек влијаат произволен број случајни фактори со произволна сложеност. Затоа таа претставува универзален метод со чија помош се решаваат проблеми од најразлични подрачја.

Техниката на симулација, како метод за решавање на одредени научни проблеми, започнува да се применува по појавата на првите компјутери. Најнапред, тоа беа аналогните компјутери во четириесеттите години (аналогна или континуална симулација), а потоа и дигиталните компјутери. Првите трудови од оваа проблематика, на Џ. Фон Нојман, С. Улам, Н. Митрополис и други, се појавија кон крајот на четириесеттите и почетокот на педесеттите години. Потоа настапува таканаречената "инженерска" фаза на симулацијата, кога таа како метод започнува да се користи за решавање на определени проблеми во техниката – најнапред во физиката и електрониката, а потоа и во другите технички области.

Симулацијата монте карло го носи своето име според насловот на првиот труд од оваа област "**The Monte Carlo Method**" објавен во 1949 година. Самото име на методот потекнува од името на градот Монте Карло во кнежевството Монако, град познат по своите касина и рулети, што треба да претставува директна асоцијација на сличноста на методот со рулетот, кој претставува механичка направа за генерирање на случајни броеви.

Општо гледано, постојат повеќе причини поради кои симулацијата наоѓа своја примена. Една од причините е фактот што често пати, поставениот проблем, било да се работи за чисто технички или економски проблем или пак проблем од сферата на општествените науки, е премногу комплексен и практично нерешлив со примената на класичните постапки на математичката анализа и математичката статистика.

Многу од задачите (проблемите) на реалните системи се опишуваат со голем број сложени и **комплицирани равенки**, па аналитичкиот пристап не може да даде решение или пак не дава доволно прецизно решение. Во последниот случај, проблемот станува решлив само ако се извршат низа упростиувања и апроксимации кои се веќе такви што го прават моделот да не биде реален одраз на системот што го опишува, па добиените резултати на таквиот начин стануваат практично неупотребливи.

Покрај тоа, во случаите на сложените системи, односите помеѓу поедините компоненти се такви што тие можат тешко да се преточат во погодна математичка форма или пак имаат случајна природа, што повторно придонесува проблемот тешко да биде решлив со класичните аналитички пристапи. Таквите системи се решаваат ефикасно со техниката на симулација. Теориски гледано, може да се каже дека практично не постои толку сложен и комплексен проблем кој не би можел да се реши со симулација. **За симулацијата проблем не претставува комплексноста на задачата што се решава, туку потребното пресметковно време и цената на добиеното решение.**

Друга важна причина која доведува до примена на методот на симулација е можноста да се истражуваат **системи кои се уште не постојат**, односно да се истражуваат ситуации кои се очекуваат да настанат во иднина. Типичен пример за тоа е, да речеме, градбата на електроенергетските системи. Во таквите задачи, на пример, обично се поставува прашањето како ќе се одрази појавата на нов вод врз доверливоста на работата на мрежата, или пак што ќе значи за системот задоцнувањето на влегувањето во погон на новиот планиран извор и т.н. Добивајќи реален одговор на таквите прашања, истражувачот може да донесува одлуки за стратегијата и динамиката на развојот на системот. Со ваквиот модел можат да се предвидат и последиците од таквите одлуки и да се намали ризикот од преземање погрешни и несоодветни инвестициони зафати кои, подоцна скапо ќе се одразат во погонот.

Денес симулацијата веќе претставува многу често употребен метод (кај нас за жал сè уште не) во операционите истражувања на системите. Таа веќе претставува научна дисциплина која успешно се применува во сите сфери на човековото постоење и со неа се решаваат не само технички

проблеми, туку и проблеми од доменот на медицината, економијата и другите дејности на човекот. Сепак, и пона-таму постојат определени тешкотии кои ја ограничуваат нејзината примена.

Основен проблем е фактот што правилното опишување на работата на сложените системи на компјутерски јазик претставува тешка и макотрпна работа. Симулацијата претс-тавува интердисциплинарна задача, која во себе обединува проблеми од областа на нумеричката математика, теоријата на веројатноста, статистичката анализа, автоматската обра-ботка на податоците, а бара и врвно познавање на некои од програмски ориенираните јазици. За реализацијата на оваа задача неопходно е ангажирање на високостручен кадар во кого ќе бидат обединети во исто време познавањата на сите наведени области. Тој треба да биде доволно стручен и во доменот на истражуваниот проблем. Секој проблем што треба да се решава со симулација на компјутер бара специфичен приод. Мали се можностите за генерализација на проблемите дури и тогаш кога се работи за задачи со слична природа.

Оваа тешкотија е донекаде намалена дури во последните го-дини, после појавата и развитокот на специјално ориенти-раните симулациони компјутерски јазици. Но и тие сè уште немаат општа употреба и во директна форма можат да се користат само за решавање на некои специфични категории проблеми.

Друг проблем кој барем засега ја ограничува широката при-мена на симулацијата е фактот што решавањето на задачите со оваа техника е сврзано со **многукратно повторување на една иста процедура**, наречена **експеримент**, а со тоа сврзано и со големо компјутерско време. Симулацијата всушност **претставува експериментирање со моделот**, со помош на компјутер. Таа, во извесна смисла, може да се споредува и со физичките експериментирања, со таа разлика што физичкиот експеримент се врши уште и под влијание на околината која не секогаш може да се стави под контрола на експеримента-торот, додека пак компјутерската симулација се одвива точно онака како што е тоа однапред замислено и експериментот на компјутерот може да се повтори произ-волен број пати, под исти "**лабораториски**" услови. Пример за тоа може да биде, да речеме, симулацијата на атмосферс-кото празнење во преносен вод и определувањето на веро-

јатноста за појавата на обратен прескок или пак определувањето на статистичкиот закон на распределба на пренапоните при комутации на долгите водови итн.

Проблемот со големото пресметковно време постепено се ублажува бидејќи цената на компјутерите имаат тенденција на опаѓање, додека во исто време интензивните истражувања што се вршат во доменот на компјутерската техника во кои учествува армија стручњаци насекаде во светот, резултира со појава на сè побрзи и поефтини компјутери.

Трет проблем сврзан со примената на симулацијата е фактот што таа претставува техника која може да даде само **приближно решение** на разгледуваниот проблем. **Грешката** во резултатот, т.е. разликата помеѓу добиеното и точното решение, секогаш ќе **претставува случајна величина** која практично има нормален закон на распределба. Значи, решението на проблемот не ќе може да се добие со однапред зададена точност како што е тоа вообичаена постапка кога вршиме пресметување со помош на аналитичките методи, туку симулацијата секогаш ќе дава решение, за кое што грешката со извесна доза на ризик нема да ја надмине однапред зададената толеранција. Со други зборови, секогаш **ќе постои некаква несигурност** во добиениот резултат, некаква веројатност, условот во поглед на големината на грешката на резултатот де не биде задоволен.

Грешката, гледана како случајна големина, секогаш ќе има нулево математичко очекување. Нејзината дисперзија пак ќе зависи од бројот на изведените експерименти n и ќе биде пропорционална на односот $\sqrt{D/n}$. Од тука произлегува фактот дека доколку точноста на резултатот сакаме да ја зголемиме за десет пати (едно важечко место во резултатот повеќе), тогаш ќе биде потребно бројот на изведените експерименти во симулацијата да го зголемиме за сто пати.

Големината на грешката, при даден број на експерименти, ќе зависи од вредноста на константата D . Таа пак зависи од природата на анализираната појава и претставува некаква мерка за нејзината растуреност (дисперзираност). Кога процесот е дисперзиран и кога случајноста во него е силно застапена, тогаш собитијата што ќе се случуваат во текот на процесот ќе бидат поразновидни и понепредвидливи, а константата D за таквиот процес ќе има поголема вредност. Затоа, неговото решавање, при однапред зададена точност,

ќе биде сврзано со зголемент број на експерименти. Слична состојба ќе имаме и кога во рамките на еден случаен процес набљудуваме некакво ретко собитие, т.е. собитие или појава со мала веројатност на настанување. И во тој случај ќе биде неопходно да се изведува поголем број на експерименти, т.е. симулации.

Од изнесеното произлегува дека, во поглед на точноста, техниката на симулација се одликува со следните особини:

- 1) невозможно е добивање на егзактното решение на проблемот,
- 2) точноста на добиениот резултат ќе зависи од природата (дисперзираноста) на анализираниот проблем и од бројот на изведените експерименти (симулации),
- 3) при решавањето на еден ист проблем повеќе пати, секогаш ќе се добива поинаков резултат.

3.2 ПОТРЕБЕН БРОЈ НА ЕКСПЕРИМЕНТИ ВО СИМУЛАЦИЈАТА

Нека во процесот на симулацијата набљудуваме некоја случајна величина X , која има свој закон на распределба. Со $m = M(X)$ и $\sigma^2 = D(X)$ ќе ги означиме математичкото очекување (односно средната вредност) и дисперзијата (растурањето околу средната вредност) на случајната величина X . Во нашиот случај, со X може да биде означена, на пример, количеството на неиспорачаната електрична енергија на потрошувачите во текот на една година, или пак времето во текот на кое системот ќе работи со дефицит на моќност итн.

Ако со X_i ја означиме вредноста што ја добила случајната величина X во текот на i -тиот експеримент, тогаш после изведените n експерименти, за набљудуваната случајна величина, во општ случај, ќе добиеме n различни вредности:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n,$$

со помош на кои ќе треба да ги определиме (процениме) непознатите параметри $M(X)$ и $D(X)$.

Најдобра проценка за математичкото очекување $M(X)$ и дисперзијата $D(X)$ се статистички определените големини \bar{X} и σ^2 , дефинирани со изразите:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}, \quad (3.1)$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}. \quad (3.2)$$

За доволно големи вредности на n ($n > 30$), ќе важи:

$$s^2 \approx \sigma^2 \approx \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n} - \bar{X}^2. \quad (3.3)$$

Од друга страна, статистички (емпириски) определената вредност \bar{X} , според централната гранична теорема ќе претставува случајна големина, и за доволно големи n , нејзината распределба ќе биде блиска до нормалната (гаусовата) распределба. Според оваа теорема, величината \bar{X} приближно ќе претставува нормално распределена случајна величина со математичко очекување $m = M(X)$ и стандардна девијација σ/\sqrt{n} . Значи, запишано со математичка нотација, ќе имаме:

$$\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}). \quad (3.4)$$

Според тоа, за доволно големи n , за веројатноста P случајната променлива \bar{X} да се најде во интервалот

$$m - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < m + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

околу бараната вредност m , ќе важи:

$$P(|\bar{X} - m| < t \cdot \sigma/\sqrt{n}) = 2 \cdot \Phi(t), \quad (3.5)$$

односно

$$P(\bar{X} - t \cdot \sigma/\sqrt{n} < m < \bar{X} + t \cdot \sigma/\sqrt{n}) = 2 \cdot \Phi(t) = \beta. \quad (3.6)$$

Во релациите (3.5) и (3.6) со $\Phi(t)$ е означена функцијата на Лаплас, дефинирана со изразот:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \cdot \int_0^t \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \cdot dx. \quad (3.7)$$

Релацијата (3.6) ја има следната смисла. Со веројатност $\beta = 2 \cdot \Phi(t)$ можеме да тврдиме дека непознатата m ќе се наоѓа во интервалот $(\bar{X} - t \cdot \sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + t \cdot \sigma/\sqrt{n})$.

Вредноста на функцијата на Лаплас $\Phi(t)$ за произволен аргумент t може да се добие во Excel-от со помош на вградената статистичка функција NORMDIST. Синтаксата е следна:

$$=2*(1-NORMDIST(t;0;1;TRUE)).$$

Големината β се нарекува веројатност на довербата, додека големината

$$\delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.8)$$

се нарекува точност на проценката. Интервалот

$$(\bar{X} - \delta, \bar{X} + \delta) \quad (3.9)$$

во кој, со определена веројатност, ќе се движи бараната вредност на математичкото очекување m , се нарекува интервал на довербата.

Во табелата 3.1 е прикажана зависноста на параметарот t од веројатноста на довербата β за некои покарактеристични вредности на веројатноста β .

Табела 3.1 Табеларен приказ на зависноста $t = t(\beta)$

Веројатност на довербата β	t
0,683	1,00
0,800	1,28
0,900	1,64
0,950	1,96
0,990	2,58
0,997	3,00
0,999	3,31

Познавајќи ја статистички определената вредност на стандардната девијација σ (релација 3.3), при зададена точност δ и при зададена веројатност на довербата β лесно може да се определи потребниот број на експерименти n

$$n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{\delta^2}. \quad (3.10)$$

Притоа, вредноста на t се определува со помош на таб. 3.1.

3.3 ГЕНЕРАТОРИ НА СЛУЧАЈНИ БРОЕВИ

Основна задача на секоја стохастичка симулација е генерирањето на таков редослед на собитите, кој по својата случајна природа во целост ќе го одразува поведението на реалниот физички систем. Кај компјутерската симулација, овој проблем се решава со помош на таканаречените "генератори на случајни броеви".

Општо говорејќи, постојат три различни начини за добивање на случајни броеви со однапред зададен закон на распределба (дистрибуција):

- користење на готови, претходно формирани таблици на случајни броеви,
- генерирање на случајни броеви по аналоген пат (нпр. со помош на електронски цевки и користење на шум),
- генерирање на псевдослучајни броеви со помош на дигитален компјутер.

Од разбирливи причини, во денешно време се користи исклучиво последниот начин за добивање на случајни броеви.

Секоја случајна големина со познат закон на распределба, зададен во аналитичка или пак во табеларна форма, може да се генерира по нумерички пат со помош на еден генератор на рамномерно распределени случајни броеви. Значи, ако располагаме со квалитетен генератор на рамномерно распределени случајни броеви, тогаш ќе располагаме и со квалитетен генератор кој ќе генерира случајни броеви што подлежат на бараниот закон на распределба. Затоа, врз создавањето на квалитетни генератори на рамномерно распределени случајни броеви се работело долго време, уште од самиот почеток на примената на техниката на симулација, па денес постои голем број разновидни вакви генератори кои работат на различни начини.

3.3.1 Генератор на рамномерно распределени случајни броеви

За реализација на една симулација со помош на компјутер, неопходно е повеќекратно генерирање на случајни вредности на разни случајни променливи со однапред зададен закон на распределба. За тоа е потребно е да ни стои на располагање генератор на рамномерно распределени случајни броеви.

Од секој генератор на случајни броеви се бара да има определени својства. Пред сѐ, потребно е тој да биде доволно квалитетен, т.е. да дава меѓусебно независни (некорелирани) броеви кои навистина ќе подлежат на зададениот закон на распределба. Истотака, генераторот треба да биде брз и да не захтева меморирање на голем број помошни броеви, потребни за неговото работење.

Со вакви особини се одликуваат повеќето конгруентни генератори, воведени во 1951 година од Лемер. Заради својата едноставност, квалитет, а особено брзина, тие се задржале во широка употреба и до ден денес. Системскиот програм **RND**, кој што се наоѓа вграден во Excel-овиот VBA, во основа претставува мултипликативен конгруентен генератор на рамномерно распределени случајни броеви во интервалот (0,1). Симулациите, вршени во рамките на овој труд, изведувани се со помош на овој генератор.

Низа од случајни броеви кои се рамномерно распределени во даден интервал може едноставно да се добие во самиот компјутер, со помош на разни алгоритми. Еден од најчесто применуваните алгоритми се состои во идејата, случајниот број R_{i+1} во $i+1$ -от чекор да се добие како остаток од делењето

$$\frac{a \cdot R_i + c}{m}$$

каде што R_i е познатиот случаен број од претходниот чекор од низата, додека a , c и m се погодно избрани ненегативни цели броеви.

Оваа постапка во литературата е наречена "конгруенција", а самите генератори кои ја користат – конгруентни генератори. Во случајот кога е $c > 0$, генераторот на случајни броеви се нарекува линеарен конгруентен генератор. Доколку, пак, е $c = 0$ тој ќе се нарекува мултипликативен конгруентен генератор. Системскиот програм **RND** претставува мултипликативен конгруентен генератор.

Користениот генератор **RND** е сосема брз и не бара меморирање на случајни броеви. Слабост му е, како и на сите други нумерички генератори, што генерира псевдослучајни броеви. Имено, тој може да генерира само определен број дискретни вредности од интервалот (0,1), или поточно, ги генерира само рационалните броеви:

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}.$$

Значи, постојат само $m-1$ дискретни вредности од интервалот $(0,1)$ што можат да се произведат на случаен начин со помош на овој генератор. Притоа, чекорот на дискретизација е $1/m$ и тој претставува ограничување, наметнато од хардверските можности на компјутерот.

Периодичноста на генерираните броеви претставува друга слабост на секој генератор на псевдослучајни броеви. Најголемата вредност на периодот кај мултипликативните конгруентни генератори изнесува $p = m-1$. Генераторот RND има период $m-1$, што значи дека тој генерира низа од случајни броеви која ќе почне да се повторува после p -тиот генериран број. За среќа, потребниот број на генерираните броеви е најчесто знатно помал од периодот p па на тој начин се избегнува проблемот со повторување на случајните броеви во низата. Во спротивно, повторувањето се избегнува со примената на сложените генератори кај кои се врши мешање на случајните броеви, генерирани од два или повеќе генератори на рамномерно распределени случајни броеви.

Сепак може да се констатира дека денашните компјутери, па дури и персоналните, имаат веќе такви хардверски можности шти тоа не претставува проблем, односно бројот m на дискретни вредности што се добиваат од генераторот RND е сосема доволно голем.

Со помош на системскиот генератор RND, вграден во VBA, којшто генерира рамномерно (униформно) распределени случајни броеви во интервалот $(0, 1)$, е можно да се добие и генератор на рамномерно распределени случајни броеви во друг, произволен интервал $(a - b)$:

$$x = a + (b - a) \cdot RND. \quad (3.11)$$

3.3.2 Генерирање на случајни броеви со произволен закон на распределба

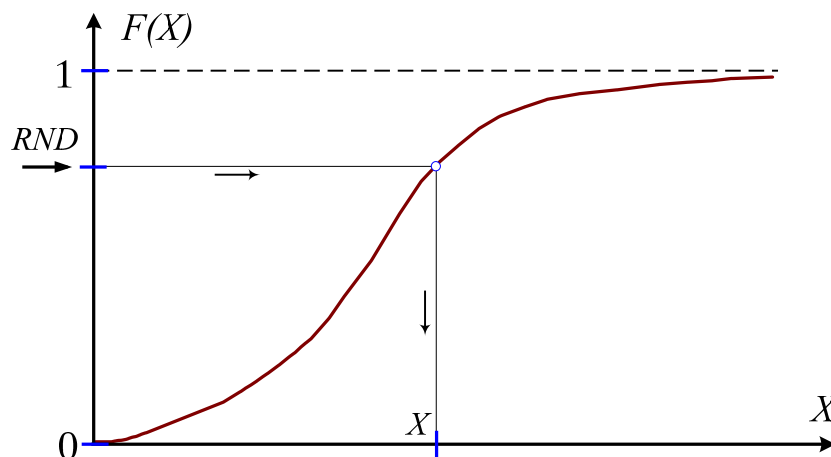
Врз работата на сложените системи влијаат низа фактори кои имаат детерминистичка или пак стохастичка природа. Затоа и самиот тек на работата на системите има природа на случаен процес. Многу често, поведението на техничките системи може да се опише или апроксимира со еден прост, пуасонов случаен процес, т.е. процес кај кој временските

интервали помеѓу две последователни собитија претставуваат случајни величини со експоненцијален закон на распределба. Притоа, врз процесот може да влијаат и појави кои истотака имаат случајна природа, но со поинаков закон на распределбата. Се среќаваат појави кои имаат нормален закон (Гасусов-Gauss), Вајбулов (Weibull) закон или пак некој трет, произволен закон на распределбата, кој не може да се вброи во ниеден од стандардните познати закони.

Досега се изнајдени неколку различни начини за моделирање и симулација на случајни големини со даден закон на распределбата. Притоа најчесто се применува т.н. "**метод на инверзна трансформација**" затоа што за генерирањето на случајни броеви со експоненцијален и нормален закон на распределба, кои најчесто се користат во симулациите на процесите во техничките системи, тој се покажал како најсоодветен.

За примената на овој метод, потребно е да се располага со генератор на рамномерно распределени случајни броеви и да биде позната функцијата на распределбата $F(X)$ на генерираната случајна величина X . Со задавање (избор) на случаен број RND , рамномерно распределен во интервалот $(0,1)$ (слика 3.1) и со решавање на равенката (3.12) на графички или аналитички начин се добива случаен број X кој ќе подлежи на бараната распределба $F(X)$.

$$X = F^{-1}(RND). \quad (3.12)$$



Слика 3.1. Генерирање на случајни броеви со познат закон на распределба со помош на методот на инверзна трансформација

Значи, генерирањето на случајни броеви со помош на методот на инверзна трансформација се изведува во два чекора:

- 1) се генерира рамномерно распределен случаен број $RND \in (0,1)$,
- 2) се решава равенката (3.12) по графички или аналитички пат.

Инверзната трансформација претставува универзален метод за генерирање на случајни броеви со даден закон на распределбата. Таа може да се применува не само за континуираните, туку и за генерирање на дискретни случајни величини. Исто така, неа можеме да ја применуваме и тогаш кога функцијата на распределба нема познат аналитички израз, туку таа е зададена во табеларна форма, што е чест случај кога законот на распределба на анализираната случајна појава е определен емпириски, или пак по експериментален пат.

3.3.2.1 Генерирање на случајни броеви со експоненцијален закон на распределба

Функцијата на распределба на случајната величина со експоненцијален закон на распределба го има обликот:

$$RND = F(X) = 1 - \exp(-a \cdot X) ; X \geq 0. \quad (3.13)$$

Со инверзна трансформација на (3.13) се добива:

$$X = \frac{-1}{a} \cdot \ln(1 - RND). \quad (3.14)$$

Бидејќи $1 - RND$ и RND се случајни величини со напoлно иста распределба, $1 - RND$ во (3.14) може да се замени со RND , па на тој начин се добива:

$$X = -\frac{1}{a} \cdot \ln(RND). \quad (3.15)$$

3.3.2.2 Генерирање на случајни броеви со стандарден нормален закон на распределба

Случајната величина $X \sim N(0, 1)$ со стандарден нормален закон на распределба е дефинирана со функцијата на распределба:

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^X \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot dx ; -\infty \leq X \leq +\infty. \quad (3.16)$$

Доколку располагаме со генератор на случајни броеви со ваква распределба, лесно ќе можеме да генерираме и нормално распределени случајни броеви со општа распределба $N(m, \sigma)$ која има математичко очекување m и стандардна девијација σ :

$$N(m, \sigma) = m + \sigma \cdot N(0, 1) . \quad (3.17)$$

Во системските библиотеки на поголемиот број програмски јазици постојат вградени програми за таа намена. Така, на пример, во библиотеката на јазикот Fortran се наоѓа програмот GAUSS кој служи за генерирање на случајни броеви со стандарден нормален закон на распределба. Овој генератор е сосема едноставен и релативно брз. Се темели врз примената на централната гранична теорема, со помош на која може да се докаже дека случајната величина X , т.е.

$$X = \sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \sum_{i=1}^n \left(RND_i - \frac{n}{2} \right), \quad (3.18)$$

добиена со помош на n взаемно независни, рамномерно распределени случајни броеви во интервалот $(0,1)$, има распределба која, за доволно големо n , е сосема блиска до стандардната нормална распределба $N(0,1)$. Според тоа, ако се усвои $n = 12$, тогаш ќе се добие сосема едноставен алгоритам за генерирање на случајни броеви кои приближно имаат стандарден нормален закон на распределба:

$$X = \sum_{i=1}^{12} RND_i - 6 . \quad (3.19)$$

3.4. СИМУЛАЦИЈА НА СЛУЧАЈНИ ПРОЦЕСИ

Илустрација на примената на методот на компјутерска симулација за анализа на некои задачи од опшата теорија на веројатноста како и задачи од доменот на електроенергетиката ќе извршиме на поголем број случајни процеси.

3.4.1 Пресметување на бројот π

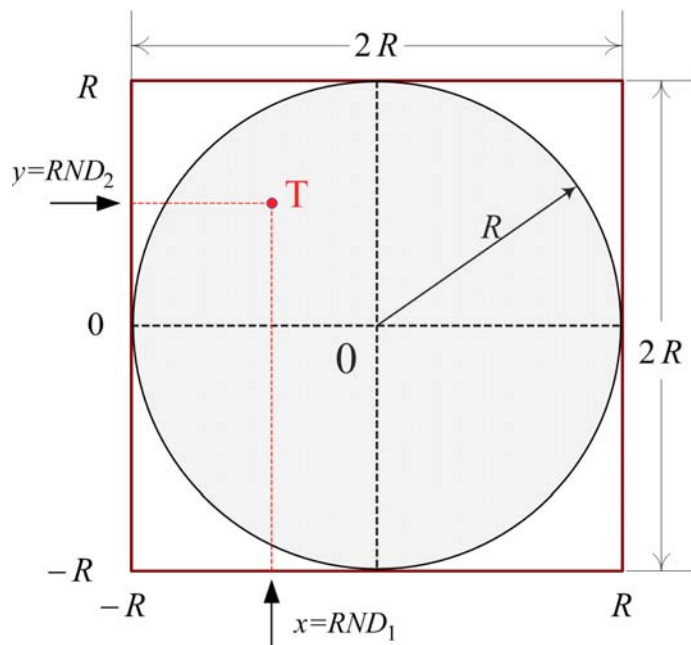
Ќе посматраме случаен процес кој претставува серија од поголем број стрелби во мета што се состои од круг со радиус R впишан во квадрат со страница $2R$. Нека гаѓањето се врши од голема далечина така што сите точки квадратот се подеднакво изложени на погодок. Притоа со n ќе го

означиме бројот на погодоци во квадратот додека со m ќе го означиме бројот на погодоците во кругот, при што е $m \leq n$.

Познато е дека во тој случај бројот π може да се добие како гранична вредност од веројатноста:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4P = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \frac{m}{n} \quad (0)$$

Притоа се претпоставува дека секој погодок во квадратот е случаен и дека секоја точка во него има подеднаква шанса да го прими тој погодок, т.е., како што се вели, веројатноста за погодок во било која точка во внатрешноста на квадратот (и кругот) е рамномерно (униформно) распределена во целата површина опфатена со квадратот.



Слика 3.2. Пресметување на бројот π со случаен избор на точка во квадрат

Значи секој експеримент се состои од случаен избор на координатите x и y на точката T при што x и y се рамномерно распределени случајни броеви во интервалот $(-R, R)$, т.е. тие се генерираат со помош на следниот алгоритам:

$$\begin{aligned} x &= -R + 2R \cdot RND \\ y &= -R + 2R \cdot RND \end{aligned} \quad (3.21)$$

Доколку точката T , генерирана на опишаниот случаен начин припаѓа на внатрешноста на кругот тогаш имаме "погодок во целта", додека во спротивниот случај целта не е погодена.

Притоа е сосема јасно дека како критериум дали дошло до погодок или не ќе ни послужи следниот тест:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq R. \quad (3.22)$$

Ако условот (3.22) е исполнет целта е погодена и бројачот на погодоците m го зголемуваме за 1, т.е. во компјутерската програма пришуваме:

$$m = m + 1. \quad (3.23)$$

Веројатноста за погодок во целта P се добива врз основа на принципот на геометриската веројатност како однос на површините A_1 и A_2 , каде што со A_1 е означена површината на кругот, т.е. $A_1 = R^2\pi$, додека со A_2 е означена површината на квадратот, т.е. $A_2 = R^2$. Значи, ќе имаме:

$$P = \frac{A_1}{A_2} = \frac{R^2 \cdot \pi}{4 \cdot R^2} = \frac{\pi}{4}, \quad (3.24)$$

од каде што следува:

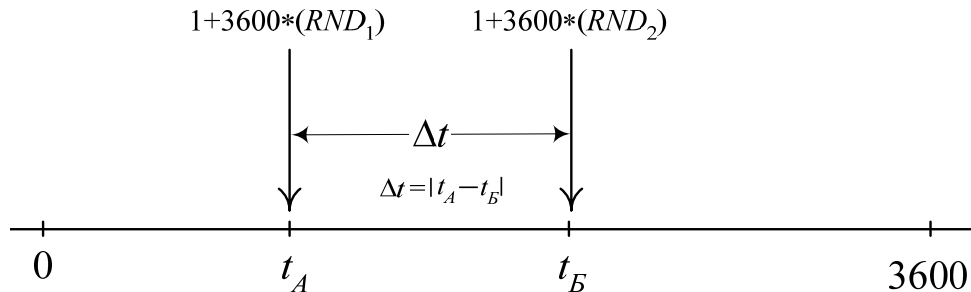
$$\pi = 4 \cdot P = 4 \cdot \frac{m}{n}. \quad (3.25)$$

Со тоа се докажува точноста на изразот (3.20) кој вели дека бројот π може да се добие четворократна гранична вредност на односот (m/n) на бројот на погодоците m и вкупниот број експерименти n . Притоа колку е бројот на експерименти n поголем, толку резултатот од вака добиената вредност на бројот π на статистички начин ќе биде поблиску до точната вредност – и обратно. Оваа задача се решава со помош на програмата "Brojot pi.xls".

3.4.2 Пресметување на веројатност за случајна средба на две договорени лица

Нека е потребно да се реши следниот веројатносен проблем. Двајца пријатели се договориле да се сретнат на определено место помеѓу 11 и 12 часот. Оној што ќе дојде прв (лицето А) треба да чека на својот пријател (лицето Б) точно 20 минути а потоа си заминува. Значи, средбата ќе се смета за реализирана доколку лицето Б се појави на закажаното место не подоцна од предвидените 20 минути по пристигнувањето на лицето А. Со помош на компјутерска симулација да се пресмета веројатноста P лицата да се сретнат на договореното место.

Во овој случај веројатноста P ќе определиме статистички, како однос помеѓу бројот на успешните експерименти m и вкупниот број експерименти n . Секој експеримент притоа ќе се одвива (симулира) на следниот начин (слика 3.3).



Слика 3.3. Случајна средба на две лица

1 чекор. Се избира случаен момент t_A на пристигнување на лицето А. Тој момент е рамномерно распределен во интервалот од 0 до 60 минути. Ако времето t , заради поголема прецизност, го изразуваме во секунди со резолуција од само 1 s, тогаш случајниот момент на пристигнувањето на лицето А на договореното место, t_A , ќе се добие како:

$$t_A = \text{INT}(1 + 3600 * RND). \quad (3.26.a)$$

2 чекор. На сличен начин се определува и случајниот момент на пристигнување на лицето Б:

$$t_B = \text{INT}(1 + 3600 * RND). \quad (3.26.b)$$

3 чекор. Анализа на настанатата состојба

Двајцата пријатели ќе се сретнат ако разликата $(t_A - t_B)$, по апсолутен износ, не е поголема од 20 мин., т.е. 1200 s:

$$\text{ABS}(t_A - t_B) \leq 1200.$$

Оваа задача се решава со помош на програмата "Sredba 2.xls". Изгледот на арботниот лист преку кој се пристапува кон оваа програма е даден на сликата 3.4.

Од самата слика 3.4 се гледа дека доколку е договорено времето на чекање на изнесува $\Delta t = 20 \text{ min}$, веројатноста двете лица да се сретнат на случаен начин, определена по статистички пат со примена на симулацијата Монте Карло изнесува, приближно, 0,554 или 55,4%. Лесно се покажува (со метод на проба) дека доколку е $\Delta t = 17,6 \text{ min}$, тогаш веројатноста за случајна средба ќе биде 0,5.

Microsoft Excel - Opsti verovat.problemi.xls

File Edit View Insert Format Tools Data Window Help Adobe PDF

Type a question for help

0.554310023784637

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nexp	100000	START		Тек на пресметките		
2	Време Δt	20.00			<i>n</i>	<i>P</i>	
3	Верој. <i>P</i>	0.55431			10000	0.552	
4					20000	0.555	
5					30000	0.557	
6					40000	0.558	
7					50000	0.555	
8					60000	0.554	
9					70000	0.554	
10					80000	0.555	
11					90000	0.554	
12					100000	0.554	
13							
14							
15							

Ready

start

EN

19:17

Слика 3.4. Случајна средба на две лица – раб. лист Sredba 2"

3.4.3. Фрлање коцки

Microsoft Excel - Opsti verovat.problemi.xls

File Edit View Insert Format Tools Data Window Help Adobe PDF

Type a question for help

2.7749

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Nexp	1000000	START		ИГРА: ФРЛАЊЕ НА 2 КОЦКИ				
2	<i>P</i> точно =	2.778 %							
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									

Ready

start

EN

19:56

Слика 3.4. Програма „ 2 Коски “

Друг веројатностен проблем којшто е можно да се анализира со компјутерска симулација е играта фрлање коцки. На сликата 3.5. е прикажан изгледот на работниот лист од програмата "2 Kocki.xls" со која се врши симулација на експериментот наречен „фрлање коцки“.

Програмата прави определен број експерименти N_{exp} , онолку колку што е внесено во келијата **B1**. Секој експеримент се состои од генерирање на 2 случајни цели броја K_1 и K_2 коишто примаат вредности од 1 до 6, со подеднаква веројатност. Генерирањето на целите броеви во определен интервал $[m, n]$ се врши повторно со помош на вградениот системски генератор RND , со помош на следниот алгоритам:

$$K_1 = m + \text{int}((n-m)*RND_1), \quad (3.27)$$

$$K_2 = m + \text{int}((n-m)*RND_2) \quad (3.28)$$

каде што RND_1 и RND_2 се два последователно генерирани случајни броеви со рамномерна распределба во интервалот $(0, 1)$.

Исходот од секој таков експеримент, т.е. комбинацијата (K_1, K_2) , се регистрира. После извршувањето на сите N_{exp} експерименти програмата ги прикажува сумарните резултати во табела (слика 3.4), при што во табелата се искажува процентуалната застапеност на секоја можна комбинација.

Бидејќи секоја од можните 36 комбинации се подеднакво веројатни, би требало да се очекува дека вака определените веројатности на тие комбинации по статистички пат ќе се движат околу вредноста:

$$p = \frac{1}{36} \cdot 100 = 2,778\%.$$

Колку е бројот на експерименти поголем, толку и статистички определените веројатности од табелата ќе бидат по својот износ поблиску до теориската вредност 2,778%.

3.4.4. Игра со фрлање 3 парички (фанта)

Играта „фанта“ ја играат тројца играчи. Се состои од фрлање 3 парички, приложени од секој играч. Паричките се фрлаат во воздух на случаен начин и паѓаат на земја на својата „глава“ или на својот „грб“. Играчот којшто ги фрла паричките ќе ги добие сите три парички доколку по нивното

случајно фрлање во воздух на земјата падне комбинација во која барем две од паричките паднале на својата глава.

Повторно, како и во претходниот случај, секое фрлање парички се третира како еден експеримент од којшто можат да произлезат вкупно 4 настани. Ако со 0 ја означиме состојбата кога паричката што се фрлила паднала на својот грб, а со 1 состојбата кога таа паднала на својата глава, тогаш тие 4 настани се следните:

- 0) настан кога се добила комбинацијата 0 0 0, кога сите три парички паднале на својот грб;
- 1) настан кога се добила комбинација од 1 глава и 2 грба;
- 2) настан кога се добила комбинација од 2 глави и 1 грб и
- 3) настан кога се добила комбинација од 3 глави.

Веројатностите за секој од овие 4 настани, коишто се означуваат со P_0 , P_1 , P_2 и P_3 – респективно, програмата "Delenje 52.xls" ги определува по статистички пат. Лесно може да се докаже дека нивните точни вредности изнесуваат

$$P_0 = 0,125; P_1 = 0,375; P_2 = 0,375; P_3 = 0,125.$$

Оваа задача се решава со помош на програмата "Delenje 52.xls". Изгледот на работниот лист преку кој се повикува оваа програма е прикажан на сликата 3.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Nexr	1000000	START									
2	Вер. P_0	0.12548			n	P_0	P_1	P_2	P_3			
3	Вер. P_1	0.37508			50000	0.124	0.377	0.373	0.126			
4	Вер. P_2	0.37443			100000	0.124	0.377	0.374	0.125			
5	Вер. P_3	0.12500			150000	0.125	0.377	0.374	0.125			
6					200000	0.125	0.377	0.374	0.124			
7					250000	0.125	0.376	0.374	0.124			
8					300000	0.125	0.376	0.374	0.124			
9					350000	0.125	0.376	0.374	0.125			
10					400000	0.125	0.376	0.375	0.125			
11					450000	0.125	0.375	0.375	0.125			
12					500000	0.125	0.375	0.375	0.125			
13					550000	0.125	0.375	0.375	0.125			
14					600000	0.125	0.375	0.374	0.125			
15					650000	0.126	0.375	0.374	0.125			
16					700000	0.126	0.375	0.374	0.125			
17					750000	0.126	0.375	0.374	0.125			
18					800000	0.125	0.376	0.374	0.125			
19					850000	0.125	0.375	0.374	0.125			
20					900000	0.125	0.375	0.375	0.125			
21					950000	0.126	0.375	0.374	0.125			
22					1000000	0.125	0.375	0.374	0.125			

Слика 3.5. Игра „ Fanta 3 “

3.4.5. Влечење 5 карти од шпил со 52 карти

Во оваа игра се влечат, на случаен начин, 5 карти од еден комплетен шпил со 52 карти. После секое делење резултатот се регистрира, картите се враќаат во шпилот, шпилот се меша на случаен начин и повторно се врши ново делење. Такви делења се прават вкупно N_{exp} . Во конкретниот случај е $N_{\text{exp}} = 20$.

На сликата 3.6 се прикажани резултатите од таквите 20 случајни делења. Оваа задача се решава со помош на програмата "Delenje 52.xls". Слична е и играта наречена "Delenje 24.xls" кај која шпилот се состои од само 24 карти.

n	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
1	1	16	29	39	52	1 Pik	4 Herc	8 Pik	10 Karo	14 Herc
2	3	6	13	50	52	1 Karo	2 Tref	4 Pik	14 Tref	14 Herc
3	8	11	24	42	50	2 Herc	3 Karo	6 Herc	12 Tref	14 Tref
4	5	22	25	36	44	2 Pik	6 Tref	7 Pik	9 Herc	12 Herc
5	1	4	6	8	14	1 Pik	1 Herc	2 Tref	2 Herc	4 Tref
6	2	3	40	43	52	1 Tref	1 Karo	10 Herc	12 Karo	14 Herc
7	11	17	31	36	47	3 Karo	5 Pik	8 Karo	9 Herc	13 Karo
8	8	30	38	44	52	2 Herc	8 Tref	10 Tref	12 Herc	14 Herc
9	3	11	22	34	42	1 Karo	3 Karo	6 Tref	9 Tref	12 Tref
10	6	19	42	43	51	2 Tref	5 Karo	12 Tref	12 Karo	14 Karo
11	21	25	29	37	42	6 Pik	7 Pik	8 Pik	10 Pik	12 Tref
12	1	13	20	25	48	1 Pik	4 Pik	5 Herc	7 Pik	13 Herc
13	4	9	13	35	49	1 Herc	3 Pik	4 Pik	9 Karo	14 Pik
14	4	14	29	33	35	1 Herc	4 Tref	8 Pik	9 Pik	9 Karo
15	14	21	46	51	52	4 Tref	6 Pik	13 Tref	14 Karo	14 Herc
16	3	13	26	38	42	1 Karo	4 Pik	7 Tref	10 Tref	12 Tref
17	20	23	29	45	51	5 Herc	6 Karo	8 Pik	13 Pik	14 Karo
18	23	30	36	50	51	6 Karo	8 Tref	9 Herc	14 Tref	14 Karo
19	9	13	24	34	42	3 Pik	4 Pik	6 Herc	9 Tref	12 Tref
20	2	17	27	43	52	1 Tref	5 Pik	7 Karo	12 Karo	14 Herc

Слика 3.6. Игра „ Delenje 52 “

3.4.6 Симулација на атмосферско празнење

Атмосферските празнења (ударите на гром, односно молња) претставуваат случаен процес кој исто така, како и другите случајни појави во природата, може многу успешно да се моделира со помош на компјутерска симулација. На тој начин е можно да се вршат определени "лабораториски" истражувања на неговата природа и неговите особини со помош на компјутер.

Со долгогодишни набљудувања, регистрации на атмосферските празнења во објекти на земјата и експериментирања во лабораторија, може да се каже дека се скоро целосно осознани природата на самото атмосферско празнење. Овде ќе ги изнесеме само некои од поважните сознанија кои се неопходни за правилното моделирање на молњата/громот.

Громот претставува струен импулс со голем интензитет на струјата којшто се мери во десетици па и стотици килоампери и кусо траење. Иако траењето на тој импулс е релативно кусо (неколку десетини μs) сепак големиот интензитет на струјата е доволен громот да предизвика пожари, оштетувања и други видови штети и опасности кај објектите во кои настанало атмосферското празнење.

Затоа објектите во кои живеат луѓе (станбени и административни згради, училишта, кина, театри музеи и сл. како и објектите кои содржат вредни или опасни содржини (складишта на муниција, гориво и други запаливи материји) мораат да бидат соодветно заштитени од директните атмосферски празнења. Од директни удари на громот треба да се штитат и индустриските објекти, електроенергетските објекти (разводните постројки, трафостаници, далекуводи и др.) како и другите видови поважни објекти. Се штитат со т.н. „надворешна громобранска инсталација“ која се изведува најчесто со громобрани или громобрански јажиња.

Во почетната фаза на одвивањето на самото празнење од облакот према земјата односно објектите на земјата громот (наречена фаза на лидерско празнење) можеме да го замислиме како една точка полна со електрицитет која постепено, но скоковито, се спушта према земјата. Тоа е т.н. *глава на лидерот* на громот кој има задача да "го испита теренот" и да создаде патека помеѓу облакот и објектот во кој тој има намера да удри. Кога лидерот на громот се доближи на доволно блиско растојание до објектите на земјата, кое се нарекува *ударно растојание* и ретко надминува стотина m, тој веќе ја избрал својата цел. Од сите објекти кои се наоѓаат во неговата близина на растојание помало од ударното, громот ќе удри во оној објект кој е најблиску до него.

Ударното растојание R_U зависи од количеството електрицитет што се насобрало во облакот, т.е. посредно зависи од амплитудата на струјата громот:

$$R_U = 8 \cdot I_M^{0,65}. \quad (3.29)$$

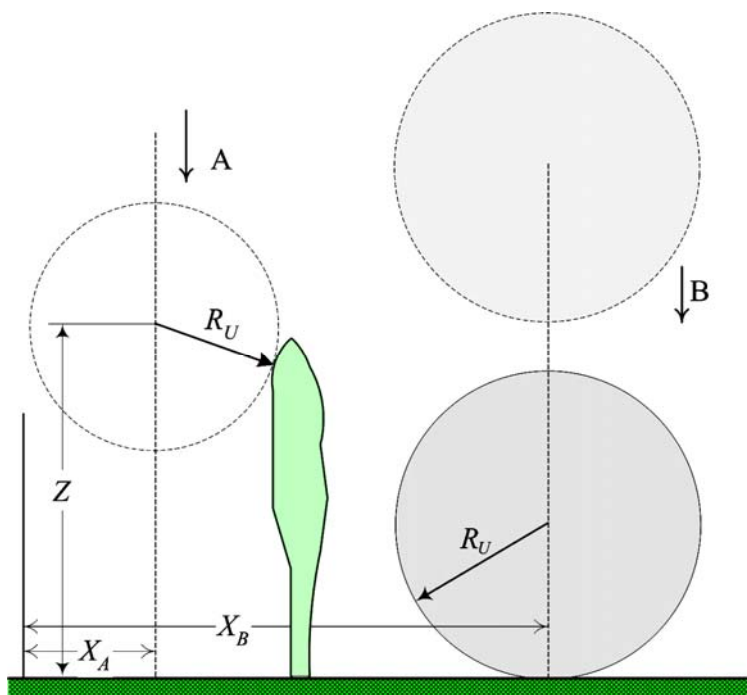
Од друга страна амплитудата на струјата на громот I_M претставува случајна величина и таа од случај до случај добива различни вредности. Утврдено е дека за нашето поднебје нејзиниот закон за распределба може приближно да се опише со следниот израз:

$$P(I_M > I) = \frac{1}{1 + (I/31)^{2,6}} \quad (3.30)$$

Левата страна во последниот израз ја дава веројатноста P амплитудата на струјата на громот I_M (кА) да ја надмине вредноста I (кА).

Значи ударното растојание R_U , слично како и амплитудата на струјата на громот I_M , претставуваат случајни величини. Тоа е всушност причината зошто атмосферското празнење претставува случаен процес со различни можни исходи. Тоа ја прави анализата на тој процес со класичните аналитички постапки тешко изводлива и многу е попрактично процесот да се решава со симулациони методи.

Сега е јасно е дека исходот од еден ваков случаен процес (каде удрил громот) се сведува на чисто геометриска задача која се состои во пресметка на растојание помеѓу топка и права односно топка и рамнина.



Слика 3.7. Симулација на атм. празнење во лидерскиот стадиум на спуштање главата на лидерот кон објектите

Исходот од процесот каде ќе заврши ударот зависи од повеќе случајни фактори:

- 1) позицијата на правецот на спуштање на каналот на громот (лидерот) т.е. местото на ударот во X-O-Y рамнината во услови кога не би постоеле објекти на земјата,
- 2) геометријата на објектите на земјата (нивна поставеност на земјата, димензии и сл.) и
- 3) големината на ударното растојание R_U односно големината на струјата на громот I_M .

Процесот на атмосферското празнење се истражува преку изведување поголем број експерименти $N_{\text{ехр}}$. Секој експеримент се состои од повеќе фази.

1. фаза. Избор на местото на ударот (координата X).

Во оваа фаза се врши случаен избор на точката на ударот на громот на површината од земјата. Тоа е онаа точка во која би завршило празнењето доколку не постојат никакви објекти на неа. Бидејќи, во општ случај, проблемот е дводимензионален, изборот на местото на ударот се состои во генерирање на два рамномерно распределени случајни броја x и y со кои се дефинираат координатите на точката на ударот на површината од земјата. Притоа, бидејќи сите точки од земјата можат со подеднаква веројатност да го примат ударот на громот, треба да се користат генератори на рамномерно распределени случајни броеви од типот (3.11).

2. фаза. Избор на амплитудата на струјата на громот I_M .

Бидејќи е позната функцијата на распределба на веројатноста за амплитудата на струјата на громот (3.30) нејзиниот случаен избор се врши на едноставен начин, со помош на методот инверзна трансформација (3.12) односно слика 3.1. Значи најнапред се избира еден случаен број $y = RND$ и со помош на тој број и изразот (3.30) се добива бараната случајна вредност на амплитудата I_M .

$$y = \frac{1}{1 + (I/31)^{2,6}} \Rightarrow I_M = 31 \cdot \left(\frac{1-y}{y} \right)^{(1/2,6)} \quad (3.31)$$

Потоа, со помош на изразот (3.29) се пресметува големината на ударното растојание $R_U = 8 \cdot I_M^{0,65}$ на громот во посматраниот експеримент.

3. фаза. Избор на објектот којшто ќе го прими ударот

Секој објект (громобран, зграда, дрво, фабрички оцак и слично) може да се опише во просторот со множество точки со точно дефинирани, познати, координати (x, y, z). Правилно би било тие точки да се наоѓаат на определени заемни растојанија од не поголеми од дестина метри. Такви точки ги има повеќе, за секој објект по неколку. Кога топката што се спушта по правецот на движење на каналот на громот ја допре првата од тие точки на некој објект, тогаш велиме дека дошло до празнење на громот во објектот на којшто му припаѓа таа точка.

Значи, во оваа фаза се вршат геометриски пресметки на позицијата (односно z -координатата на центарот) на топката со радиус R_U која се спушта по правецот на движење на каналот на громот (А или В на сл. 3.7) во моментот на допирот на посматраната точка. Тоа се прави за секоја точка со која што се опишува објектот (објектите доколку ги има повеќе). Доколку хоризонталното растојание d помеѓу посматраната точка и правецот на движење на каналот на громот е поголемо од ударното растојание R_U , тогаш однапред се знае дека до допир, односно празнење, во таа точка нема да дојде (случај со правецот В на слика 3.7).

Според тоа во оваа, последна, фаза од експериментот се утврдува каде ќе заврши ударот на громот. Тоа може да биде површината на земјата или пак некоја од множеството точки со кои се опишани сите објекти на површината од земјата. Во последниов случај тоа ќе биде онаа точка кај која во моментот на нејзиниот допир центарот на топката има најголема z -координата.

Доколку не дојде до таков допир на топката со ниту една од точките, тогаш ниту еден од објектите нема да го прими ударот, т.е. атмосферското празнење ќе заврши во земјата.

За секој ваков експеримент се определува местото на ударот на громот – земја или некој од посматраните објекти. Врз основа на статистичката обработка на податоците за овие експерименти се определува веројатноста за директно атмосферско празнење во секој објект на земјата. За нас е од посебен интерес утврдувањето на веројатноста за директен удар на громот во деловни и станбени згради, во трафостаници, разводни постројки, надземни водови и други електроенергетски објекти, без оглед на тоа дали се тие

заштитени со надворешна громобранска инсталација или, пак, е заштитен "по природен пат" од некој од соседните објекти кој вршат негово "екранирање".

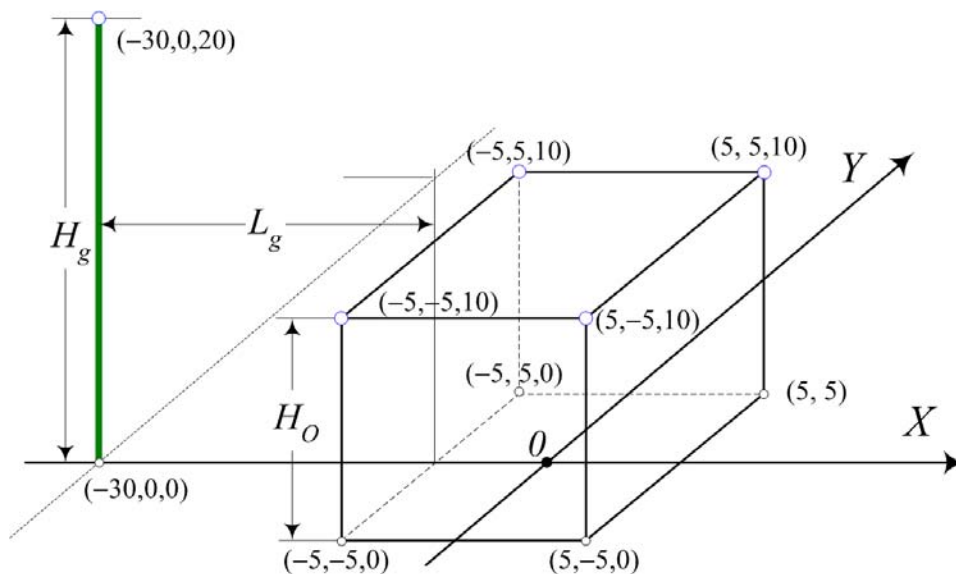
Ако ја знаеме веројатноста за директен удар на громот во некој објект, можеме да го процениме и годишниот број на директни удари на громот што ќе ги прими врз себе тој објект и на база на тој податок да ги преземеме потребните зафати за неговата сигурна заштита.

Ваквите анализи се прават со помош на програмата "Zastita od grom.xls". Изгледот на работниот лист преку којшто се повикува оваа програма е прикажана на сликата 3.8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Nexp	500000		START		36.75	Ng	Lg	Hg	X _{max}	Y _{max}
2	Област	-110	110	-110	110		4.00	30.0	20.0	110	110
3	Објекти	2									
4	Objekt 1: G1	1				64.19 %					
5		1	-30.00	0.00	20.00	64.19 %		P _{oblast}	0.04840	km ²	
6	Objekt 2: Zgrada	4				35.81 %		N _{oblast}	0.19360	удари/год.	
7		1	5.00	5.00	10.00	17.21 %		N _{zemja}	0.12246	удари/год.	
8		2	-5.00	5.00	10.00	0.70 %		N _{objekti}	0.07114	удари/год.	
9		3	-5.00	-5.00	10.00	0.68 %		N _{G1}	0.04567	удари/год.	
10		4	5.00	-5.00	10.00	17.22 %		N _{O1}	0.02547	удари/год.	
11											
12											
13											
14											
15											
16											

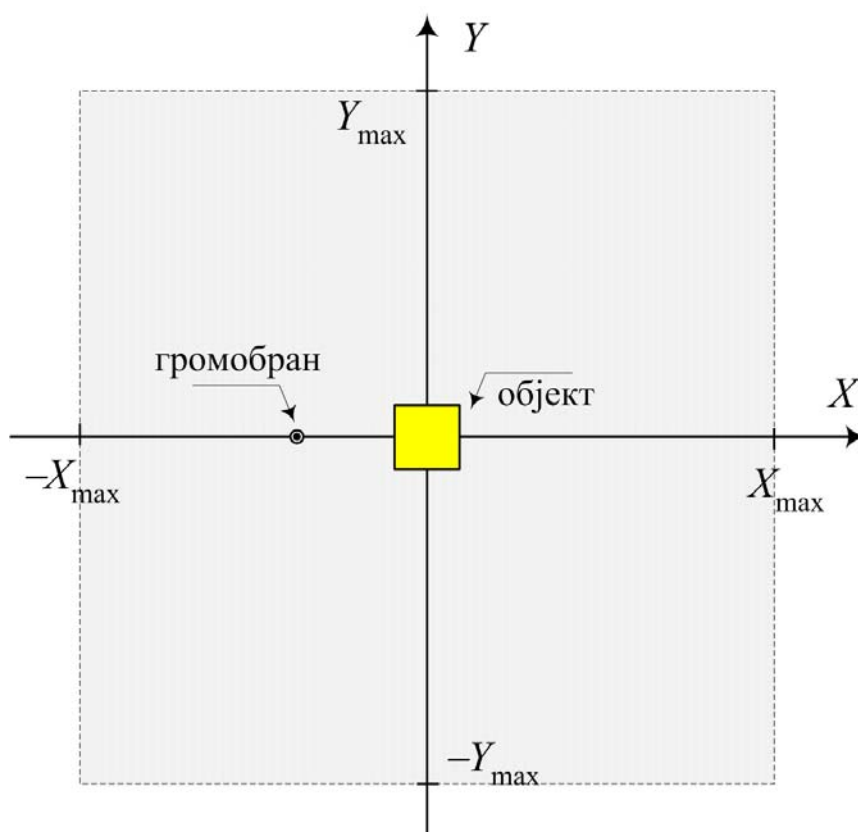
Слика 3.8. Изглед на работниот лист од програмата Zastita od grom.xls"

Во конкретниот случај се работи за систем којшто се состои од 2 објекта (келија **B2**) од кои првиот е громобран, висок 20 m, додека вториот елемент е зграда со димензии 10×10 и височина 10 m. Првиот објект, т.е. громобранот G1 се претставува само со една единствена точка која е сместена во неговиот врв и во X-O-Y координатниот систем има координати $x = -15$ m; $y = 0$; $z = 20$ m (слика 3.9). Овие координати се внесени во келиите **B5**, **C5** и **D5** – респективно, т.е. во опсегот келии **B5:D5**.



Слика 3.9. Скица на набљудуваните објекти во примерот опишан со работниот лист *Zastita od grom.xls*"

Вториот објект, т.е. зградата, се опишува со 4 точки (келија **B6**) од неговиот покрив. Нивните координати се внесени во опсегот келии **B7:D10**, на ист начин како и во претходниот случај.



Слика 3.10. Скица на теренот околу набљудуваните објекти во примерот обработуван на сликите 3.8 и 3.9

Понатаму во работниот лист се дефинира густината на атмосферските празнења N_g (келија **G4**) која претставува просечен годишен број на атмосферски празнења на површина од 1 km^2 за разгледуваната област. Во опсегот келии **J2:M2** се задаваат величините X_{\max} и Y_{\max} коишто ја дефинираат областа која ќе биде изложена на атмосферски празнења. Оваа област има форма на правоаголник којшто е поставен централно во однос на координатниот систем (сл. 3.10). Координатите на неговото долно лево теме изнесуваат $(-X_{\max}, -Y_{\max})$ додека неговото горно теме има координати $(+X_{\max}, +Y_{\max})$. Границите X_{\max} и Y_{\max} треба да се изберат така што практично ниту удар на гром надвор од таа област да не може да заврши во некој од набљудуваните објекти.

Како резултат од пресметките се добиваат следните величини:

1) келија **F1**: процентуален износ на бројот на удари (од вкупниот број удари $N_{\text{exр}}$) кои завршиле во некој од објектите. Тие удари се распределуваат по набљудуваните објекти, додека преостанатиот дел од ударите завршува во земјата, негде во изложената површина $(-X_{\max} \leq x \leq X_{\max}$ и $-Y_{\max} \leq y \leq Y_{\max})$. Во конкретниот случај од сите $N_{\text{exр}} = 500000$ удари 36,75%, т.е. 183.750 удари завршиле во некој објект (громобран G1 или зграда), додека преостанатите 216.250 удари завршиле во тлото во изложената површина. Овие 183.750 празнења се распределуваат по објектите и тоа: 64,19% т.е. 117.950 удари во објектот бр. 1 (келија **F4**) и 35,81% т.е. 65.800 удари во објектот бр. 2 (келија **F6**). Процентуалната распределба на овие 35,81% од ударите по поедините точки од вториот објект се прикажани во опсегот келии **F7:F10**.

Во келиите **I9:I10** е прикажан просечниот годишен број на директни удари на громот во првиот и вториот објект, додека во келијата **I8** е прикажан нивниот збир, односно просечниот вкупен годишен број на директни удари на громот во било кој од набљудуваните објекти.

3.5. СИМУЛАЦИЈА НА РАБОТАТА НА ЕЛЕМЕНТИТЕ ОД ЕЕС

3.5.1. Општо за задачата на пресметка на доверливоста

Првата фаза од процесот на планирањето на развојот на електроенергетскиот систем (ЕЕС) на една земја е планирањето на неговиот произведен дел, т.е. планирањето и утврдувањето на динамиката на градбата на идните извори во системот. Главна задача на планирањето на изворите е да се обезбеди континуиран раст на инсталираната моќност во системот за производство со што ќе се пратат потребите од електрична енергија во земјата и ќе се обезбеди доволна (но од економски причини не преголема) резерва на моќност со што би се постигнала задоволителна сигурност во напојувањето на конзумот со електрична енергија.

Основа за планирањето на изворите во ЕЕС се идните потреби на конзумот од електрична енергија и потребата за одржување определено ниво на доверливост во електроснабдувањето на потрошувачите. Затоа, за успешно планирање на целиот систем е многу битно да се има добра проценка за развојот на конзумот во наредниот период, а за тоа е потребно да се располага со квалитетен статистички материјал за потрошувачката во изминатиот период и добра прогноза на стопанскиот развој на земјата за наредниот период. Дури на крајот, како последна, трета, фаза во процесот на планирање на ЕЕС е планирањето на преносната мрежа и утврдувањето на потребната динамика на градбата на нејзините елементи.

Во секој случај главна задача на планирањето на изворите во еден ЕЕС е определувањето на доверливоста на неговиот произведен дел. Во овој дел ќе се запознаеме со една пробабилистичка постапка за анализа на доверливоста на производниот дел од ЕЕС базирана на симулацијата Монте Карло. Таа овозможува брзо и едноставно пресметување на главните показатели на доверливоста на еден систем. Првиот од нив е т.н. веројатност за загуба на товарот, индекс на доверливоста познат под кратенката "LOLP" (Loss of Load Probability). Тој ни ја дава веројатноста да дојде до загуба на товарот во еден ЕЕС заради испади (дефекти) на производните капацитети во него, односно посредно, тој ни го дава просечниот годишен број на часови во работата на системот со дефицит на моќност заради испади на генера-

торските единици. Другиот индекс на доверливост е т.н. "ENS" (Energy not served), којшто ни го дава количеството на електрична енергија што притоа нема да им се испорача на потрошувалите во системот поради испадите на производните капацитети, а со тоа тој ни дава добра проценка на штетите што притоа настануваат кај потрошувачите поради недоверливоста на елементите од ЕЕС.

Долгогодишното набљудување на работата на генераторските единици во ЕЕС, вршени во многу земји, покажало дека за практични пресметки на доверливоста на системот во целина, работата на еден агрегат може да се третира како еден стационарен пуасонов случаен процес. Притоа, секој генератор може да се наоѓа во две состојби: состојба на нормална работа и состојба на дефект (испад). Макар што за таа цел во литературата се среќаваат и модели за генераторските единици со три состојби (исправна работа, делумен отказ, целосен отказ), сепак, поради поедноставното илустрирање на методот, ќе биде применет упростениот, но доволно точен, модел со две состојби.

Во тој случај, процесот на работата на секој извор е во целост опишан само со два основни параметри λ и μ , кои се нарекуваат **интензивност (зачестеност)** на испадите и **интензивност на поправките**, соодветно. Времето T на нормална работа на една генераторска единица претставува должина на временскиот интервал сметан од крајот на последниот **ремонт (обновување)** на агрегатот до неговиот прв нареден испад. Статистиката вели дека тоа време претставува случајна величина со експоненцијален закон на распределба. Притоа неговата густина на распределбата ќе биде опишана со (3.32):

$$f(t) = \lambda \cdot \exp(-\lambda t). \quad (3.32)$$

и ќе има математичко очекување (т.е просечна вредност):

$$M(T) = \int_0^{\infty} t \cdot F(t) \cdot dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.33)$$

Слично важи и за времето τ потребно за поправка (ремонт) на агрегатот. Тоа, исто така, претставува случајна величина со експоненцијален закон на распределба, чија функција на густина на распределбата ќе биде:

$$\varphi(t) = \mu \cdot \exp(-\mu t), \quad (3.34)$$

а неговото математичко очекување ќе биде:

$$M(\tau) = \int_0^{\infty} t \cdot \varphi(t) \cdot dt = \frac{1}{\mu}. \quad (3.35)$$

Сепак, треба да напоменеме дека ваквиот стохастички модел на работата на изворите важи за периодот на нивната нормална експлоатација – период кој следи зад фазата на "рани испади" или "период на детски болести", кога кај секоја генераторска единица после пуштањето во погон, во наредните неколку години, се има зголемена интензивност на испадите поради евентуалните фабрички и монтажни грешки на опремата.

Периодот на нормална експлоатација на термоагрегатите обично трае не повеќе од 30 години. После тој период на работа настапува период со зголемена интензивност на испадите. Тоа е таканаречениот "период на истрошеност", кога, заради стареењето и истрошеноста на опремата, интензивноста на принудните испади повторно се зголемува, па натамошната експлоатација на генераторските единици станува неоправдана ниту од технички ниту, пак, од економски аспект. Во тој случај таа се исфрла од употреба и се заменува со нова. Кај хидроцентралите периодот на нормална експлоатација трае 50 па и повеќе години.

Наполно идентични модели се применуваат и за останатите елементи од ЕЕС, како што се водовите, енергетските трансформатори, елементите во разводните постројки и др. И кај нив се применува моделот со две состојби, при што, се разбира, параметрите λ и μ за било кој уред или елемент од ЕЕС се поинакви и тие се определуваат врз основа на анализата и статистичката обработка на податоците од изминатот период што се однесуваат на времињата на работа и времињата на поправка кај таквиот и сличен вид елементи (уреди).

Податоците за упросечените вредности на параметрите λ и μ за основните елементи од ЕЕС можат да се сретнат во соодветната стручна литература.

3.5.2. Основни поими од теоријата на доверливост

Доверливоста се дефинира како **способност за изведување (обавување) на предвидената функција во текот на определен временски период под зададени услови**. Оваа дефиниција за

доверливоста се применува како за **одделните елементи** на некој систем така и на целиот посматран **систем**.

Пресметките на доверливоста базираат на **моделите на елементите** и на **моделите на системот**. Тие модели ги одразуваат нивните карактеристики и структура. Но пресметките се базираат и на **показателите (индексите)** на доверливост на елементите од ист или сличен тип до кои што се доаѓа со статистичка обработка на податоците од експлоатација (погонот) во минатото. Со анализа на доверливоста, всушност, **се предвидува** какво ќе биде **поведението** на некој елемент или на некој систем во **иднина**, на база на познавањето и примената на податоците од минатото.

Сите пресметки на доверливоста опфаќаат **две основни фази**:

- а) Утврдување на состојбите во кои системот не може да ја извршува предвидената функција;
- б) Пресметување на индексите на доверливост на база на познавањето на состојбите утврдени во претходната фаза.

За пресметката на индексите на доверливост на електроенергетските објекти (ЕЕО) електроенергетските мрежи (ЕЕМ) и електроенергетските системи (ЕЕС) се развиени повеќе методи. Нив можеме да ги поделиме во неколку групи:

Прва група. Првата група методи ги определува **дефицитарните состојби** (состојби во кои што се јавува дефицит или неизвршување на целосната функција на уредот/системот) по пат на **системско пребарување** на состојбите во системот (мрежата) при што се опфаќаат **единечните** (едноструки) дефекти како и нивната **суперпозиција на ремонтите** на друг(и) елементи од системот. Не е на одмет овде да се нагласи дека таквата суперпозиција на испад на еден елемент со ремонт на друг всушност претставува еден вид двоен (двострук) испад, што претставува многу потешка ситуација од единечниот испад.

Втора група. Втората група методи за определување на критичните ситуации како алатка за нивното утврдување ги применува минималните пресеци во системот. Таа обично се применува кај анализите на доверливоста на преносниот (дистрибутивниот) дел од ЕЕС.

Општо посматрано, показателите на доверливост се делат на **статички** и **динамички**. **Статичките показатели** се дефинираат за **обновливите** елементи, какви што се на пример еле-

ментите на ЕЕС но и самиот ЕЕ систем во целост. Тие зборуваат за **просечното поведение** на елементите, т.е. системот посматрано на **долг рок**, најчесто во текот на целиот технички експлоатационен век на елементот или, пак, системот.

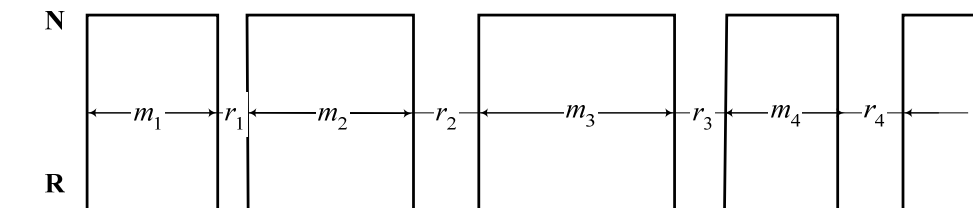
Динамичките показатели, пак, се определуваат за необновливите објекти или кога е потребно да се предвиди поведението на објектите/системот во ограничен временски период.

Имајќи ја предвид природата на ЕЕС и на неговите елементи, во наредниот дел ќе бидат наведени **дефинициите на основните индекси на доверливост** но **за стационарна состојба**. Стационарните вредности на овие показатели овозможуваат да се направи **проценка на техничко-економските карактеристики** на објектите/системите кои што ќе се однесуваат на повеќегодишен период на работа и **избор на најповолно решение** за нивната конфигурација и нивниот состав.

Работата на елементите од ЕЕС претставува **стохастички (случаен)** процес во кој разгледуваниот елемент се наоѓа во една од своите можни состојби. Во нашиот случај, кога зборуваме за доверливост на ЕЕС, состојбите на елементите како и на системот во целина се претставуваат со дискретни случајни променливи со конечен простор на состојби и **континуиран параметар** кој го претставува **времето**.

За опишување на состојбите на секој елемент од системот се користи моделот на **Марковиот процес** со **две состојби** и тоа: N (нормална) состојба во која елементот се наоѓа во нормална работна состојба и R (состојба на испад), односно состојба, во која поради грешка (дефект) елементот не може нормално да ја извршува предвидената функција.

Случајниот редослед на промени на состојбите на еден елемент е скициран на сликата 3.11. На неа со m_1, m_2, \dots, m_n и r_1, r_2, \dots, r_n се означени времињата на траењето на состојбите на нормална работа на обновување (поправка) додека со n е означен вкупниот број посматрани циклуси.



Слика 3.11. Случаен редослед на промени на состојбите на еден елемент

Нека со m го означиме средното (просечното) време на траење на исправната работа на елементот (состојба N), додека со r го означиме средното (просечното) време на траење на поправката (воспоставувањето) на елементот (состојба R):

$$m = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{n} ; \quad r = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{n} .$$

Тогаш **стационарната вредност на расположливоста** на елементот, која ќе ја означуваме со A (Availability) е еднаква:

$$A = \frac{m}{m + r} , \quad (3.36)$$

додека **стационарната вредност на неговата нерасположливост** U (Unavailability) е еднаква на:

$$U = \frac{r}{m + r} = 1 - A . \quad (3.37)$$

Збирот од времињата m и r ја даваат т.н. "**периодичност**" T на отказите (испадите) на елементот:

$$T = m + r . \quad (3.38)$$

Фреквенцијата на отказите f на елементот е еднаква на реципрочната вредност од периодичноста T , т.е.:

$$f = \frac{1}{T} . \quad (3.39)$$

Интензитетот на испадите (отказите) на елементот λ се дефинира на следниот начин:

$$\lambda = \frac{1}{m} \approx f , \quad (3.40)$$

додека **интензитетот на поправките** μ се дефинира со релацијата:

$$\mu = \frac{1}{r} . \quad (3.41)$$

Значи, преминот од состојба N во R се опишува со соодветните **интензитети на премини** λ и μ . Под интензитет на премин се подразбира веројатноста за премин од една во друга состојба во единица време, под услов претходно да не настанал таков премин, односно промена на состојбата. Интензитетите λ и μ се мерило за брзината (фреквенцијата)

на премините од едната во другата состојба. Так, на пример, ако е $\lambda = 2$, тоа значи дека тој елемент или уред во просек ќе испаѓа (ќе се расипува) $\lambda = 2$ пати годишно, т.е. дека просечното времетраење на неговата нормална работа приближно ќе изнесува $1/2 = 0,5$ години (4380 часа). Слично, $\mu = 100$ значи дека за време од 1 година (8760 часови) уредот може во просек да се поправи 100 пати, т.е. дека просечното време потребно за поправка на тој елемент изнесува 87,6 часови/поправка.

Од претходно изложеното се заклучува дека времето на нормална работа на еден елемент е случајна променлива која има експоненцијална распределба кога интензитетот на испадите λ е константен. Експоненцијална распределба на времетраењето повлекува константен интензитет на испадите.

Збирот на средното време до испад m , (*mean time to failure-MMTF*) и средното време до поправка r (*mean time to repair-MTTR*), го дефинира очекуваното времетраење на еден работен циклус T кој се состои од една состојба N и една состојба R, и се нарекува *средно време помеѓу испадите (mean time between failure-MTBF)*.

За да се опише однесувањето на елементите или системот не е доволно да се познаваат само веројатностите p и q за престој во состојбите N и R, туку и нивната фреквенција и времетраење. Фреквенцијата на еден циклус f е еднаква на реципрочната вредност на неговото времетраење. Оттука, за веројатностите еден елемент да се најде во состојбите R и N се добива:

$$\begin{aligned} A = p &= \frac{m}{m+r} = m \cdot f = \frac{f}{\lambda} \\ U = q &= \frac{r}{m+r} = r \cdot f = \frac{f}{\mu}, \\ p + q &= 1. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Во изразот (3.42) со p и q се означени *веројатностите* во даден момент на време уредот да биде исправен (N) или пак да биде во дефект, т.е. на поправка (R). Тие, значи, се совпаѓаат со расположивоста A односно нерасположливоста U на елементот.

3.5.3 Дискретен симулационен модел

Работата на ЕЕС може да се моделира со помош на таканаречениот "дискретен симулационен модел". Тоа претставува модел за еден систем чие работење се посматра во временски домен, а промените кои се случуваат во системот можат да настанат само во одредени дискретни моменти на време, наречени "временски точки". Обично процесите во ЕЕС за кои овде станува збор се дискретизираат со резолуција од 1 час, т.е. секоја година се состои од вкупно 8760 временски точки.

Во секоја временска точка може да настапат еден или повеќе настани истовремено и со тоа се менува состојбата во системот. Во конкретниов случај под настан ќе подразбираме испад на било кој елемент од системот или пак негово враќање во погонот. Под настан ќе подразбираме и измена на моќностите на потрошувачите во ЕЕС.

При анализата на процесот на работата на ЕЕС со помош на методот на симулација, практично вршиме симулација на работата на секој елемент од системот во даден временски интервал. Вообичаено е процесот да се дискретизира со временски чекор од еден час, па на тој начин и временскиот период на посматрање да се изразува во часови. Најчесто, симулацијата се однесува на периодот од една година (период долг 8760 часови), но може да се врши симулација и на подолги временски периоди (на пример 5 или 10 години). Во тој случај, временски точки ќе бидат почетоците на секој час од разгледуваниот временски период.

Симулациониот модел е динамички модел, т.е. модел кај кој доаѓа до измени на состојбата во системот во одделните временски точки. Затоа е неопходно да се следи тековната вредност на времето на симулацијата и да се регистрираат временските точки во кои доаѓа до измена на состојбата во системот. Променливата на симулациониот модел која ја дава тековната вредност на симулационото време се нарекува "симулационен саат". Постојат два типа на измени на симулациониот саат:

- временско напредување со константен раст,
- временско напредување до следниот настан.

Обично се применува пристапот со временско напредување до следниот настан, Кај него симулациониот саат ги добива

само оние вредности на времето во кои доаѓа до реализација на едно или повеќе собитија, т.е. во кои доаѓа до измена на состојбата во системот. Периодите на неактивност во текот на симулацијата не се регистрираат, што не е случај кај претходниот пристап (временско напредување со константен раст). Според тоа, овде се врши меморирање на состојбите во системот само за оние временски точки во кои доаѓа до измена на состојбата во системот, а нив ги има знатно помалку во однос на вкупниот број на можните временски точки.

3.5.4 Организација на дискретниот симулационен модел

Секој дискретен симулационен модел се состои од повеќе компоненти, неопходни при изведувањето на самите симулации. Бидејќи станува збор за дигитална симулација, реализирана на дигитална сметачка машина, обично секоја компонента ќе претставува една сабрутинска програма и таа ќе има точно определена функција во симулациониот модел. Овде ќе бидат дефинирани имињата и накратко ќе бидат опишани функциите на само поважните компоненти на симулациониот модел.

Како што веќе беше речено, симулациониот модел треба да има "симулационен саат", т.е. променлива која ја дава тековната вредност на времето во текот на симулацијата. Множеството на променливи со кои во целост е опишана состојбата во системот, во овдешната терминологија ќе се нарекува "системска состојба", додека "листата на настани" ќе ги содржи времињата на настанување и типовите на сите собитија (настани) што се случуваат во текот на разгледуваната симулација.

Секоја програма со која се врши дигитална симулација започнува со модулот наречен "програма за иницијализација". Тоа претставува дел од програмата која служи за иницијализирање на симулациониот модел т.е. за доделување на почетни вредности на системските променливи во времето $t = 0$.

После иницијализацијата на системот, се врши генерирање на листата на настани. Со помош на "генераторот на листата на настани", за секој елемент од системот се добиваат периодите на работа и периодите на поправка и со тоа се дефинираат моментите на измена на состојбата во системот.

Овие собитија се подредуваат по хронолошки ред на настанување и на тој начин се добива историјата на работата на системот во разгледуваната симулација.

Понатаму, контролата ја презема "програмата за управување со времето" – сабрутинска потпрограма со помош на која се определува следниот настан од листата на настани, а симулациониот час се напредува до моментот (времето) во кој се реализирал тој настан.

Откога е определен типот и времето на случување на настанот, контролата се префрла на "програмата за настани", со помош на која се определува системската состојба, т.е. вредностите на променливите на состојбата, во моментот кога дошло до нејзината измена.

Следи повикување на делот од програмата наречен "генератор на извештај", со помош на кој се врши пресметување на перформанциите на системот во новонастанатата состојба, се регистрираат определени собитија и појави што се од интерес во истражувањето, се врши ажурирање на вредностите на статистичките бројачи со помош на кои се регистрираат анализираните појави и настани и, по потреба, се печатат резултатите на крајот од симулацијата.

После оваа активност, главната програма врши проверка дали е процесот на симулацијата завршен, т.е. дали во листата на настани постојат собитија што сè уште не се опфатени со анализата. Споменатиот циклус се повторува сè додека не се задоволи условот за стопирање на програмата. Откако сите настани ќе бидат опфатени во експериментот, главната програма го повикува генераторот за извештај да ги пресмета статистичките вредности на анализираните променливи и да изврши печатење на извештајот.

Секоја симулација (експеримент) се повторува доволен број пати, т.е. онолку пати колку што е потребно за да може, врз основа на насобраниот "статистички" материјал да се даде доволно прецизна оценка на перформанциите на системот.

3.5.5 Опис на програмата "LOLP" наменета за пресметка на показателите на доверливост на ЕЕС со помош на симулацијата Монте Карло

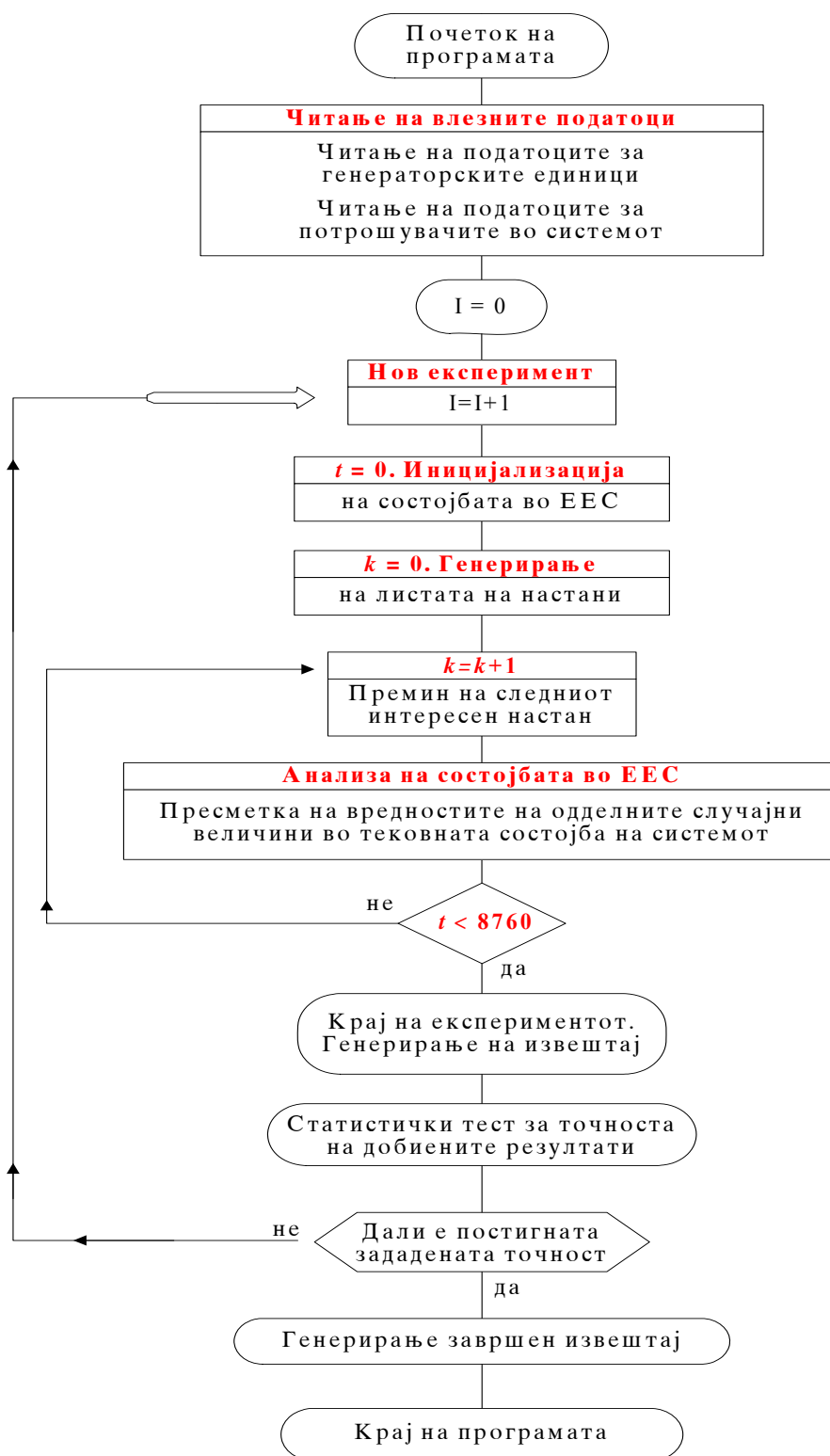
Постојат две можности за реализација на оваа компјутерска програма. Едната, поедноставна, можност е да се примени пристапот во кој симулација на работата на изворите на ЕЕС

се изведува како систем во кој временското напредување на процесот имаше константен раст. Секоја симулација ќе се однесува на периодот од една година, а самиот временски период од една година, во тој случај, се дели на 8760 часа. Врз основа на познатите коефициенти на расположивост односно нерасположивост на поедините елементи во системот, за секој нареден час се генерира состојбата во системот и се пресметуваат сумарната моќност на изворите, сумарната моќност на потрошувачите како и евентуалниот дефицит на моќност во системот. Состојбите со дефицит на моќност се регистрираат со статистички бројачи и на крајот од годината се добиваат статистички определените показатели на доверливост на системот. Симулацијата на работатата на ЕЕС во текот на една година преставува еден експеримент, а потребниот број на експерименти се определува во самиот процес на пресметување, на начин како што е тоа опишано во точката 3.2. За таа цел е неопходно однапред да биде зададена точноста со која се сака да се добијат резултатите за анализираната појава, што значи дека е потребно, покрај пресметувањето на математичкото очекување, да се врши и пресметување на нејзината дисперзија.

Во применетиот симулационен модел во програмата "LOLP" се применува вториот пристап. Повторно се усвојува период на разгледување во текот на еден независен експеримент од $TS = 8760$ часови. Исто така е усвоено временскиот чекор на дискретизација на случајниот процес да изнесува 1 саат, т.е. секој саат од годината ќе претставува една временска точка. Покрај тоа е претпоставено дека случајниот процес на работата на елементите на ЕЕС претставува стационарен пуасонов случаен процес. Со други зборови, интензивностите на испадите и поправките на сите елементи од системот се константни за време на целиот разгледуван период во рамките на експериментот. Тоа наедно значи дека времето t_i на нормална работа (или приближно, времето помеѓу два последователни испади) на било кој елемент од ЕЕС ќе претставува случајна величина со експоненцијален закон на распределба, а истото тоа ќе важи и за времето на поправката (воспоставувањето) r_i на истиот тој елемент од системот.

Бидејќи се работи за дигитална симулација, овие претпоставки не се неизбежни. Многу лесно во моделот може да се внесе, на пример, сезонската измена на интензивностите на испадите на елементите од системот, како што е тоа вооби-

чаено кај повеќето современи модели. Истотака, лесно може да се воведо било кој произволен закон на распределба на времињата t и r .



Слика 3.12. Упростен блок дијаграм на програмскиот пакет за симулација на работата на ЕЕС

Пакетот "LOLP" има организација слична на онаа, опишана во точката 3.5.3. Симулацијата на работата на елементите од ЕЕС се моделира со помош на дискретен симулационен модел. До измени на состојбата во системот може да дојде само во поедините временски точки. Измена на состојбата во системот значи испад или враќање во погон на било кој негов елемент.

Самиот програмски пакет е составен од поголем број модули (потпрограми). Неговиот упростен блок дијаграм е прикажан на сликата 3.12.

Програмата најнапред започнува со читање на податоците за поедините генераторски единици во системот. За таа цел, во засебна, претходно формирана датотека се сместени основните податоци, потребни за секоја генераторска единица, и тоа:

- реден број на генераторската единица,
- максималната расположива моќност на единицата,
- интензивности на испадите на единицата, и
- интензивности на поправките на единицата μ .

По вчитувањето на податоците за изворите, програмата ги чита податоците за потрошувачите во системот. Тие се исто така сместени во засебен работен лист. Во нив се содржани:

- податоци за дневните дијаграми на активното оптоварување, за секој месец од годината,
- податоци кои се однесуваат на дневните врвни оптоварувања на потрошувачката во системот.

Откога ќе се вчитаат влезните податоци кои се однесуваат на карактеристиките на изворите и потрошувачите во системот, се пристапува кон повеќекратно симулирање на работата на ЕЕС во текот на една година. Во рамките на една таква симулација односно експеримент, се вршат низа последователни активности.

Најнапред, на почетокот од секој експеримент, се врши иницијализација на состојбата во системот, односно иницијализација на системските променливи. Иницијализацијата на состојбата во системот значи дефинирање на состојбата во системот во моментот $t=0$. Тоа се врши со методот на случајни броеви.

За секој елемент од ЕЕС се усвојува моделот со две состојби. Тоа значи дека во било кој момент на време, тој може да се најде во една од следните две состојби:

- состојба 0, кога елементот е вон од погон,
- состојба 1, кога тој може во целост да ја изврши својата задача,

Знаејќи ја вредноста на коефициентот на расположивост A_i , почетната состојба на било кој елемент i од системот се определува на следниот начин:

$$\text{состојбата е 0 ако е } RND \geq A_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad (3.43)$$

$$\text{состојбата е 1 ако е } RND < A_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}. \quad (3.44)$$

Во последните два изрази со RND е означен случаен број кој има рамномерна распределба во интервалот $(0,1)$. Него го добиваме повикувајќи ја потпрограмата RND која служи за генерирање на вакви броеви.

По иницијализацијата на системските променливи, се врши генерирање на листата на настани во системот. Тоа се прави на следниот начин.

Тргувајќи од познатата состојба во $t = 0$, за секој елемент од системот, со помош на генераторот на случајни броеви со експоненцијален закон на распределба ги дефинираме случајните времиња T и t на нормална работа односно дефект (поправка):

$$m = \frac{-8760}{\lambda} \cdot \ln(RND), \quad (3.45)$$

$$r = \frac{-8760}{\mu} \cdot \ln(RND). \quad (3.46)$$

Со помош на овие случајни величини ги добиваме времињата, (односно со заокружување, временските точки) во кои доаѓа до испад или враќање во погонот на разгледуваниот елемент од системот. Оваа постапка ја повторуваме сè дотогаш, додека не дојдеме до крајот на разгледуваниот период TS во рамките на експериментот.

На тој начин ја генерираме историјата на животот на секој елемент од системот во текот на разгледуваниот период TS и

со тоа ја добиваме таканаречената листа на настани во симулацијата. Се разбира, листата на настани во секој експеримент се генерира со методот на случајни броеви, па според тоа, од експеримент до експеримент таа ќе се разликува.

Времињата на испад и враќање во погонот за секој елемент од системот ги запишуваме во посебен вектор \mathbf{MV} . Истовремено, во векторот \mathbf{MT} ги запишуваме и типовите на поедините настани, генерирани со (3.45) и (3.46). Притоа, усвоено е испадот на k -тиот елемент да се регистрира во векторот \mathbf{MT} со кодот $+k$, а неговото враќање во погонот, со кодот $-k$.

Со исполнувањето на векторите \mathbf{MV} и \mathbf{MT} на веќе изложениот начин, се врши целосен запис на настаните што се случиле во текот на симулацијата. По нивното регистрирање, се врши подредување (сортирање) на настаните според хронолошкиот редослед на нивното настанување. Подредувањето всушност се изведува со сортирање на елементите од векторот \mathbf{MV} по големина, при што тие се редат во растечки низ.

Со генерирањето на листата на настани и нејзиното сортирање на погоре опишаниот начин, определени се временските точки во кои доаѓа до измена на системската состојба. Со тоа се наедно дефинирани и временските интервали во текот на кои системот не ја менува својата состојба.

Натамошниот тек на пресметките се префрла на модулот кој врши анализа на состојбата во системот. Со него всушност се врши пресметување на можното производство (односно пренос на моќност, кога се зборува за доверливост на преносната мрежа) за дадената состојба во која се наоѓа системот. Тој, исто така, врши пресметка и на дефицитот на моќност и енергија, времето на работа на системот со дефицит на моќност и друго.

При сето тоа, во пресметките се уважува не само состојбата со изворите и мрежата, туку и состојбата со конзументот. За таа цел, неопходно е да се води сметка за дневните дијаграми на активното оптоварување, сезонската варијација на товарот, измените на дневниот врв, просторната распределба на товарот и друго. Истовремено, моќностите на расположливите извори се определуваат врз основа на хидролошката состојба во разгледуваниот период и врз основа на зацртаната динамика на работата во текот на денот.

Овој модул најнапред врши селекција на интервалите во кои системот ќе работи без испаднати елементи. Ваквите интервали не се од интерес за анализа, бидејќи сосема е логично да се претпостави дека во нив нема воопшто да се јави дефицит на моќност и енергија. Затоа, тие интервали се испуштаат, а се анализираат само интервалите во кои еден или повеќе елементи од системот се вон од погон. Секој таков интервал се анализира одделно, сè додека не се дојде до крајот на разгледуваниот период TS , во рамките на тековниот експеримент.

На крајот од експериментот, со делот од програмата наречен "генератор на извештај", се врши ажурирање на статистичките показатели за разгледуваните случајни појави во текот на симулацијата, а по потреба, и нивно прикажување на екранот односно во некоја излезна датотека. Статистичките бројачи за некои од анализираните случајни појави се ажурираат уште во рамките на претходниот програмски модул.

Секој експеримент се повторува доволен број пати, сè додека статистички определените вредности на посматраните случајни појави не добијат вредности што ќе отстапуваат од нивните вистински вредности за еден однапред зададен процентуален износ. За оценка на можните отстапувања на статистички определените случајни величини од нивните вистински вредности, се применува техниката изнесена во точката 3.2, што значи дека во текот на симулацијата на експериментите ќе биде неопходно да се пресметуваат не само средните вредности, туку и диспезиите на разгледуваните (анализираните) случајни величини.