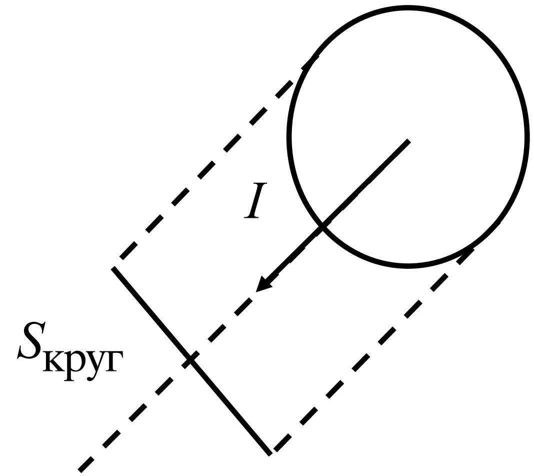
2.16.1 Светлински извор во вид на сфера зрачи рамномерно распределен светлински флукс Ф=1480 lm. Колкава е сјајноста на сферата ако нејзиниот дијаметар изнесува 10 cm?



$$\Phi = 1480\ \mathrm{lm};\ d = 10\ \mathrm{cm};\ L = ?$$

$$L = \frac{I}{S_{\text{круг}}} \qquad I = \mathrm{const.}$$

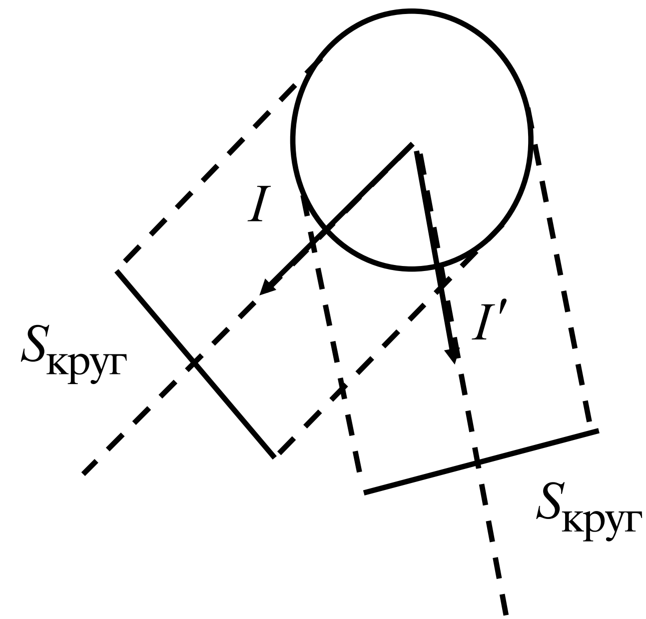
$$\Phi = I \cdot \Omega \qquad \Omega = 4\pi \qquad I = \frac{\Phi}{\Omega} = \frac{1480}{4\pi} = 117{,}8\ \mathrm{cd}$$

$$L = \frac{I}{S_{\text{круг}}} = \frac{\dfrac{1480}{4\pi}}{\dfrac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{1480}{\pi^2 \cdot 0{,}1^2} = 14995{,}5 \approx 15000\ \frac{\mathrm{cd}}{\mathrm{m}^2}$$

2.16.2 Сфера со дијаметар 4 cm зрачи според Ламбертовиот закон. Вкупниот светлински флукс на изворот е 3000 lm. Да се определи сјајноста на сферата.

$\Phi = 3000$ lm; $d = 4$ cm; $L = ?$

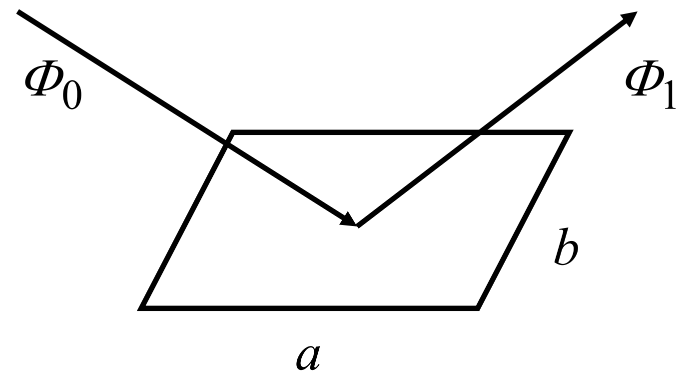
$L = \text{const.}$



$$L = \frac{I}{S_{\text{круг}}} = \frac{I'}{S_{\text{круг}}} \quad \Rightarrow \quad I = I' = \frac{3000}{4\pi} = 238{,}7 \text{ cd}$$

$$L = \frac{I}{S_{\text{круг}}} = \frac{\dfrac{3000}{4\pi}}{\dfrac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{3000}{\pi^2 \cdot 0{,}04^2} = 189977{,}22 \approx 190000 \ \frac{\text{cd}}{\text{m}^2}$$

2.16.3 Плоча од алуминиум има облик на правоаголник со должина 30 cm и ширина 20 cm. На плочата паѓа рамномерно распределен светлински флукс од 4200 lm. Од плочата се одбива 60% од паднатиот флукс. Да се пресмета осветленоста и светлинската емисија на плочата.



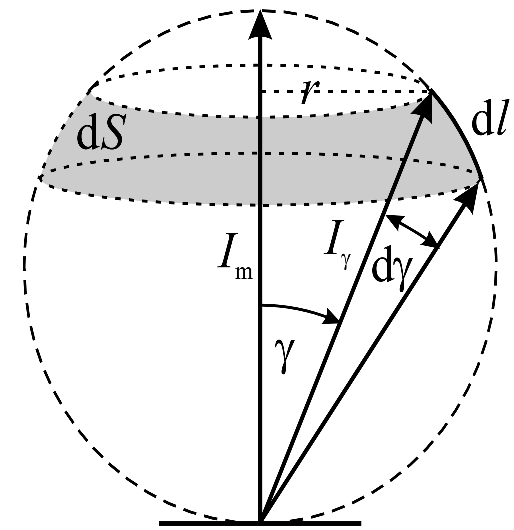
$\Phi_0 = 4200\ \mathrm{lm};\ a = 30\ \mathrm{cm};\ b = 20\ \mathrm{cm};\ \Phi_1 = 60\%\Phi_0$

$E = ?\ M = ?$

$$E_{\text{плоча}} = E_{\text{средна}} = \frac{\Phi_0}{S} = \frac{4200}{0{,}3 \cdot 0{,}2} = 70000\ \mathrm{lx}$$

$$M_{\text{плоча}} = \frac{\Phi_1}{S} = \frac{0{,}6 \cdot \Phi_0}{S} = 0{,}6 \cdot E = 0{,}6 \cdot 70000 = 42000\ \frac{\mathrm{lm}}{\mathrm{m}^2}$$

2.16.4 Униформно дифузен светлински извор има облик на круг со плоштина S=10 cm^2. Во правец на својата нормала изворот зрачи со светлинска јачина I_0=100 cd. Да се определи: а) светлинската емисија на изворот, б) просторниот агол во кој се зрачат две третини од светлинскиот флукс на изворот.



$$S = 10\ \text{cm}^2;\ I_0 = 100\ \text{cd};\quad M = ?\quad \Phi_{2/3} = ?$$

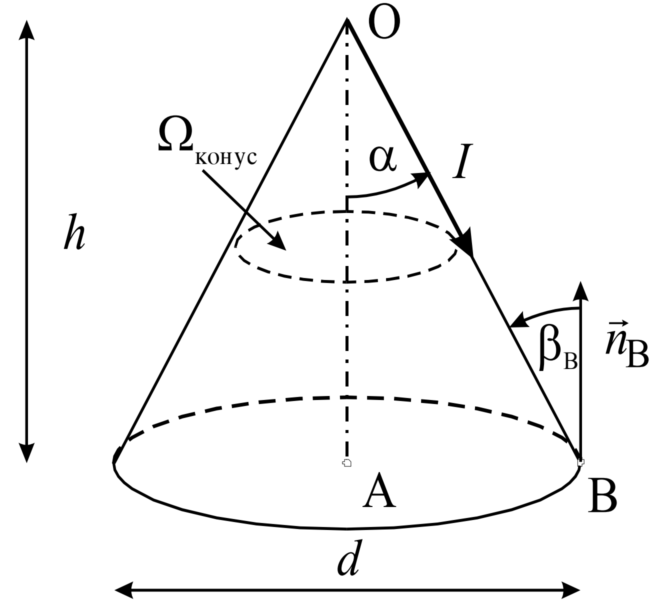
$$M = \pi \cdot L = \pi \cdot \frac{I_0}{S} = 10^5 \pi\ \ \text{lm/m}^2$$

$$\Phi_{2/3} = \frac{2}{3}\Phi_{\text{извор}} = \int_{\Omega_{2/3}} I \cdot \mathrm{d}\Omega = \pi \cdot I_0 \int_0^{\alpha_{2/3}} \sin 2\gamma \cdot \mathrm{d}\gamma = \pi \cdot I_0 \cdot \left(\frac{-\cos 2\gamma}{2} \right)\Bigg|_0^{\alpha_{2/3}}$$

$$\frac{2}{3}\pi \cdot I_0 = \pi \cdot I_0 \cdot \left(\frac{-\cos 2\alpha_{2/3} + \cos 0}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad \alpha_{2/3} = \frac{\arccos(-1/3)}{2} = 54{,}74^\circ$$

$$\Omega_{2/3} = 2\pi \cdot \left(1 - \cos\alpha_{2/3}\right) = 2{,}657\ \text{sr}$$

2.16.5 На врвот на еден конус е поставен униформен светлински извор. Во внатрешноста на конусот изворот зрачи светлински флукс Φ=1200 lm. Висината на конусот е *H*=0,3 m, а дијаметарот на основата изнесува *d*=0,2 m. Да се пресмета: а) светлинската јачина на изворот, б) осветленоста на кругот со центар во А и дијаметар *d*, и в) осветленоста во точката А и осветленоста во точката В.



$$\Phi_{\text{конус}} = 1200\ \text{lm};\ h = 0{,}3\ \text{m};\ d = 0{,}2\ \text{m};\ I = ?$$

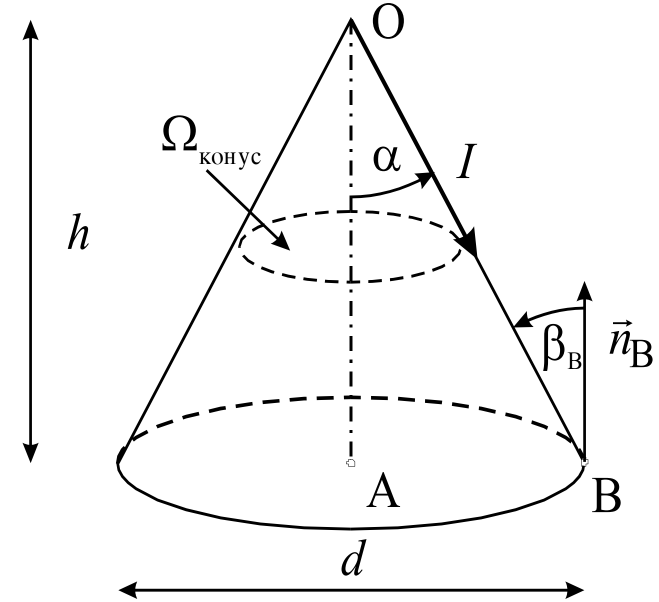
$$\mathrm{d}\Phi = I \cdot \mathrm{d}\Omega$$

$$\Phi_{\text{конус}} = \int_{\Omega_{\text{конус}}} I \cdot \mathrm{d}\Omega = 2\pi \cdot I \int_0^{\alpha} \sin\gamma\, \mathrm{d}\gamma = I \cdot 2\pi \cdot (1 - \cos\alpha) = I \cdot \Omega_{\text{конус}}$$

$$\alpha = \operatorname{atan}\frac{d/2}{h} = \operatorname{atan}\frac{0{,}1}{0{,}3} = 18{,}435^\circ$$

$$\Omega_{\text{конус}} = 2\pi \cdot \left(1 - \cos 18{,}435^\circ\right) = 0{,}3224\ \text{sr}$$

2.16.5



$$I = \frac{\Phi_{\text{конус}}}{\Omega_{\text{конус}}} = \frac{1200}{0{,}3224} \approx 3722 \text{ cd}$$

$$\Phi_{\text{извор}} = I \cdot 4\pi = 3722 \cdot 4\pi \approx 46772 \text{ lm}$$

$$E_{\text{круг}} = \frac{\Phi_{\text{круг}}}{S_{\text{круг}}} = \frac{\Phi_{\text{конус}}}{\pi \cdot 0{,}1^2} = \frac{1200}{\pi \cdot 0{,}1^2} = \ 38197 \text{ lx}$$

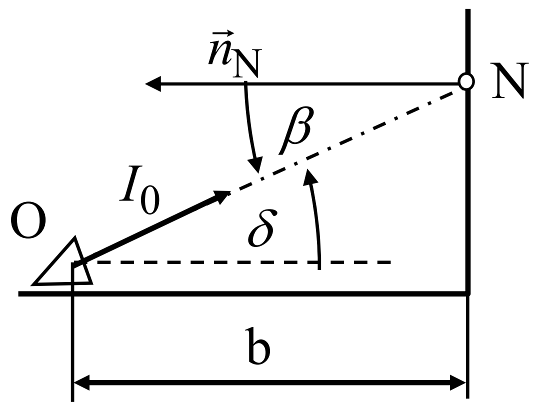
$$E_{\text{A}} = \frac{I_{\text{O-A}} \cdot \cos\beta_{\text{A}}}{\overline{\text{OA}}^2} = \frac{I \cdot \cos 0^\circ}{h^2} = \frac{3722}{0{,}3^2} = 41356 \text{ lx}$$

$$E_{\text{B}} = \frac{I_{\text{O-B}} \cdot \cos\beta_{\text{B}}}{\overline{\text{OB}}^2} = \frac{3722 \cdot \cos 18{,}435^\circ}{h^2 + (d/2)^2} = \frac{3722}{0{,}3^2 + 0{,}1^2} \approx 37220 \text{ lx}$$

2.16.6 Вертикален ѕид од фасадата на една зграда е осветлен со рефлектор што се наоѓа на растојание b=30 m од зградата. Оската на рефлекторот со хоризонталата зафаќа агол од 13°. Ако е познато дека светлинската јачина по оската на рефлекторот изнесува 200000 cd, да се пресмета осветленоста во точката на фасадата која лежи и на оската на рефлекторот.

$$I_0 = 200\ \mathrm{kcd};\ b = 30\ \mathrm{m};\ \delta = 13^\circ\ E_\mathrm{N} = ?$$

$$E_\mathrm{N} = \frac{I_{\mathrm{O-N}} \cdot \cos\beta}{\overline{\mathrm{ON}}^2}$$



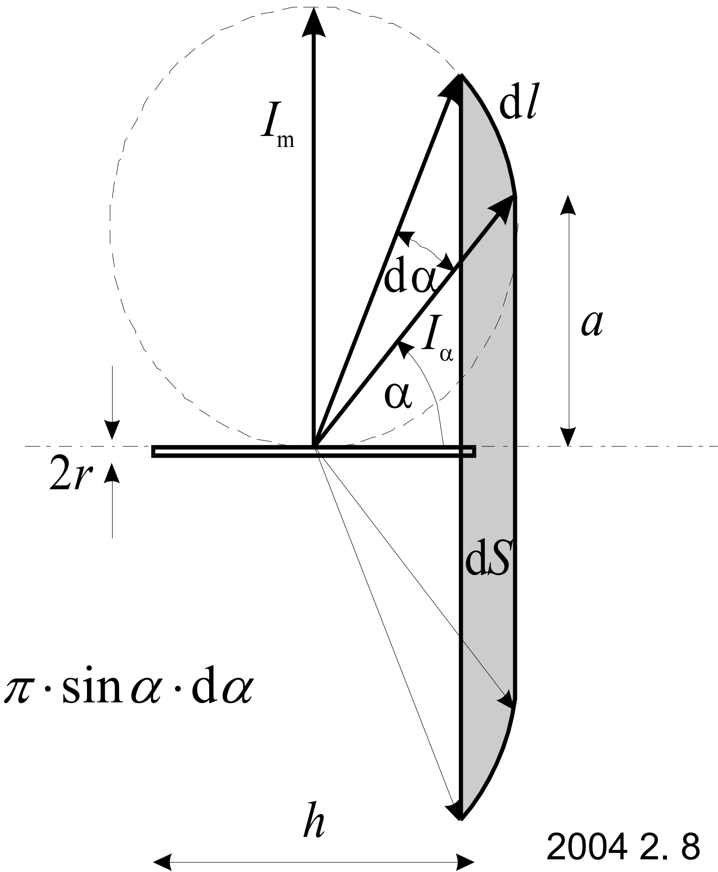
$$\overline{\mathrm{ON}} = \frac{b}{\cos\delta}$$

$$E_\mathrm{N} = \frac{I_0 \cdot \cos\beta \cdot \cos^2\delta}{b^2}$$

$$E_\mathrm{N} = \frac{200000 \cdot \cos 13^\circ \cdot \cos^2 13^\circ}{30^2} = 205{,}6\ \mathrm{lx}$$

$$E'_\mathrm{N} = \frac{I_{\mathrm{O-N}} \cdot \cos\left(90^\circ - \beta\right)}{\overline{\mathrm{ON}}^2} = \frac{200000 \cdot \cos 77^\circ \cdot \cos^2 13^\circ}{30^2} = 47{,}6\ \mathrm{lx}$$

2.16.7 Светлински извор е во вид на цилиндер со светлечка обвивка. Ако со α се означи аголот помеѓу набљудуваниот правец и оската на цилиндерот, тогаш светлинската јачина во тој правец е $I_\alpha = I_m \cdot \sin\alpha$, при што со I_m е означена максималната светлинска јачина на изворот. Да се определи: а) вкупниот светлински флукс на изворот, б) сјајноста на изворот во правец нормален на оската на цилиндерот (во симетралната рамнина на цилиндерот), ако висината на цилиндерот е 60 cm, ако неговиот дијаметар изнесува 38 и 26 mm и ако флуксот што го зрачи цилиндерот е еднаков на 1050 lm.



$$I_\alpha = I_m \cdot \sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi$$

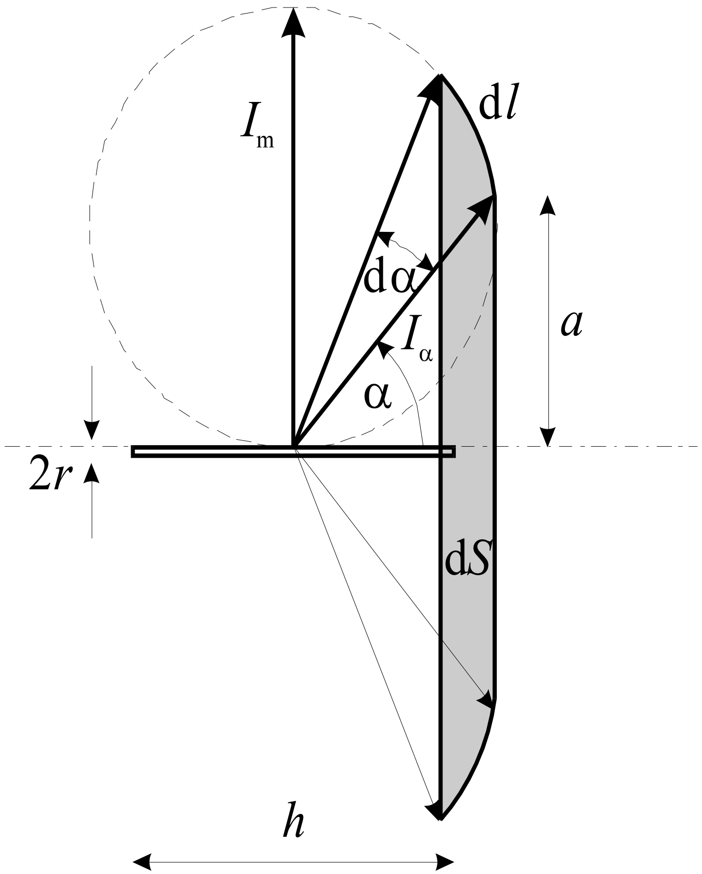
$$\Phi = \int_\Omega I \cdot \mathrm{d}\Omega$$

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{R^2} = \frac{\mathrm{d}S}{I_\alpha^2} = \frac{2\pi \cdot a \cdot \mathrm{d}l}{I_\alpha^2} = \frac{2\pi \cdot I_\alpha \cdot \sin\alpha \cdot I_\alpha \cdot \mathrm{d}\alpha}{I_\alpha^2} = 2\pi \cdot \sin\alpha \cdot \mathrm{d}\alpha$$

2.16.7

$$\Phi = \int_{\Omega} I \cdot \mathrm{d}\Omega = 2\pi \int_{0}^{\pi} I_m \cdot \sin^2 \alpha \cdot \mathrm{d}\alpha$$

$$= 2\pi \cdot I_m \int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \cdot \mathrm{d}\alpha = \pi \cdot I_m \cdot \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \Bigg|_0^{\pi} = \pi^2 \cdot I_m$$



$$\Phi = 1050 \text{ lm}$$

$$I_m = \frac{\Phi}{\pi^2} = \frac{1050}{\pi^2} = 106,4 \text{ cd}$$

$$2r = 38 \text{ mm}$$

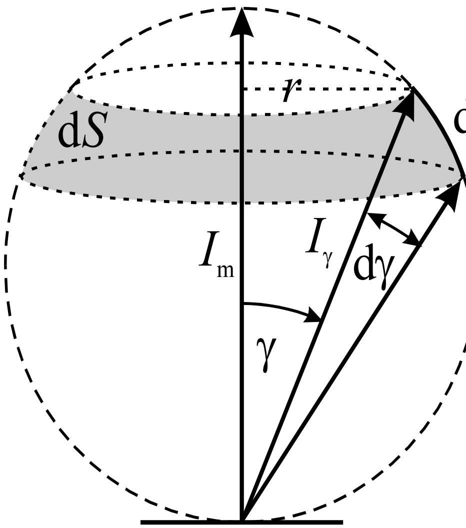
$$L_{90^\circ} = \frac{I_m}{S_\mathrm{n}} = \frac{I_m}{h \cdot 2 \cdot r} = \frac{106,4}{0,6 \cdot 0,038} = 4666 \text{ cd/m}^2$$

$$2r = 26 \text{ mm}$$

$$L_{90^\circ} = \frac{106,4}{0,6 \cdot 0,026} = 6820 \text{ cd/m}^2$$

2.16.8 Светлински извор е во вид на диск што свети само од едната страна. Ако со γ се означи аголот помеѓу оската на симетријата на изворот, што е нормална на светлечката површина, и набљудуваниот правец, а со I_m се означи максималната светлинска јачина на изворот, светлинската јачина во набљудуваниот правец е определена со законот:

$$I_\gamma = I_m \cdot \cos\gamma,\ 0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$$



$$\Phi = \int\limits_{\Omega_{1/2}} I \cdot \mathrm{d}\Omega$$

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{R^2} = \frac{\mathrm{d}S}{I_\gamma^2} = \frac{2\pi \cdot r \cdot \mathrm{d}l}{I_\gamma^2} = \frac{2\pi \cdot I_\gamma \cdot \sin\gamma \cdot I_\gamma \cdot \mathrm{d}\gamma}{I_\gamma^2} = 2\pi \cdot \sin\gamma \cdot \mathrm{d}\gamma$$

$$\Phi = \int\limits_{\Omega_{1/2}} I \cdot \mathrm{d}\Omega = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} I_m \cdot \cos\gamma \cdot \sin\gamma \cdot \mathrm{d}\gamma = \pi \cdot I_m \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\gamma \cdot \mathrm{d}\gamma$$

$$\Phi = \pi \cdot I_m \cdot \left(\frac{-\cos 2\gamma}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi \cdot I_m$$

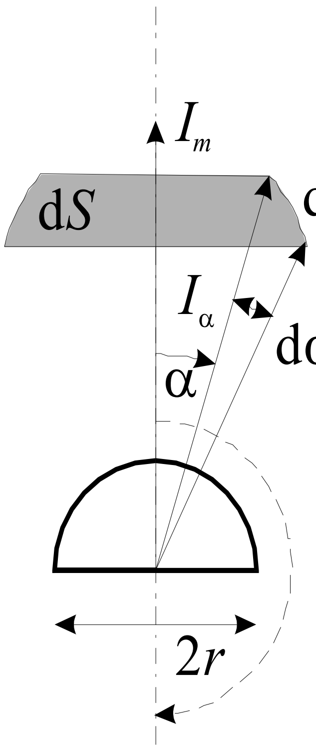
2.16.9 Светлински извор е во вид на светлечка полутопка. Основата на полутопката не свети. Распределбата на светлинската јачина на изворот е дадена со дадената релација, каде што *a* е агол помеѓу набљудуваниот правец и оската на симетријата на изворот, а I_m е максималната светлинска јачина на изворот. Да се определи: а) вкупниот светлински флукс на изворот; б) сјајноста на изворот во правец на неговата оска на симетри-јата, ако е I_m=1000 cd, а радиусот на полутопката е 20 cm. в) дали овој извор зрачи според Ламбертовиот закон?

$$I_\alpha = I_m \cdot \frac{1+\cos\alpha}{2}, 0 \le \alpha \le \pi$$

$$\Phi = \int_\Omega I \cdot \mathrm{d}\Omega = \pi \cdot I_m \int_0^\pi (\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha) \cdot \mathrm{d}\alpha$$

$$= \pi \cdot I_m \cdot \left(-\cos\alpha - \frac{1}{4}\cos 2\alpha \right)\Bigg|_0^\pi = 2\pi \cdot I_m$$

$$L_{0^\circ} = \frac{I_{0^\circ}}{S_{\text{круг}}} = \frac{I_m}{\pi \cdot r^2} = \frac{1000}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 7958 \text{ cd/m}^2$$



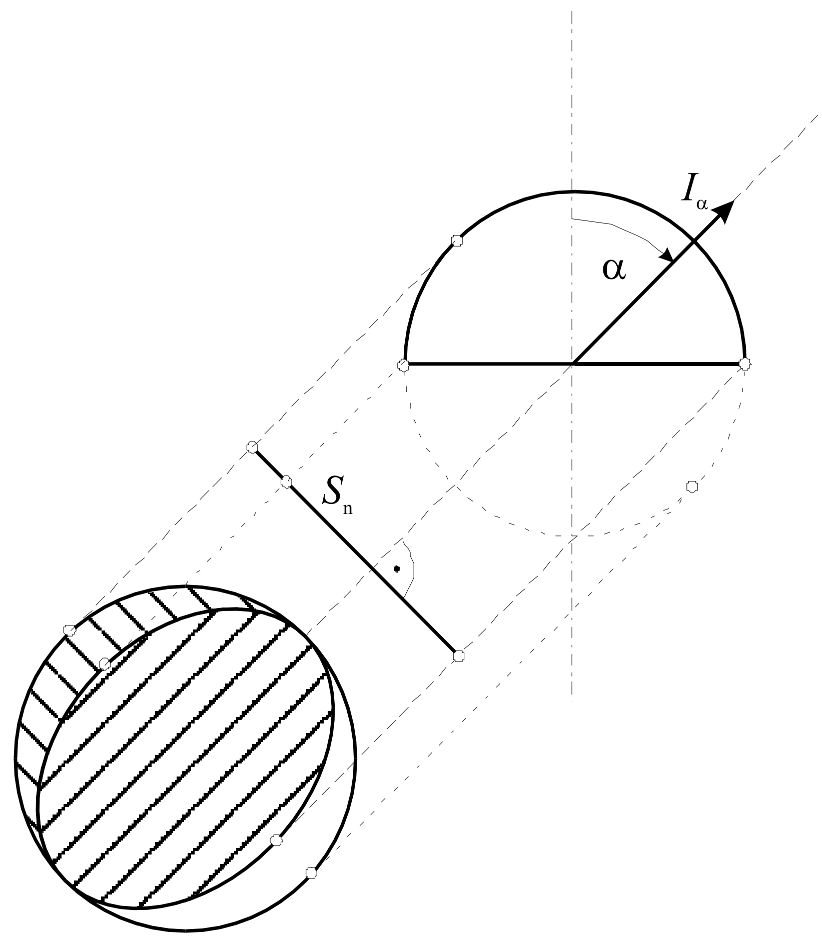
2.16.9

$$S_{\text{n}} = S_{\alpha} = S_{\text{круг}} - \frac{S_{\text{круг}} - S_{\text{елипса}}}{2} = \frac{S_{\text{круг}} + S_{\text{елипса}}}{2}$$

$$S_{\text{елипса}} = S_{\text{круг}} \cdot \cos\alpha$$

$$S_{\alpha} = S_{\text{круг}} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$L_{\alpha} = \frac{I_{\alpha}}{S_{\text{n}}} = \frac{I_m \cdot \frac{1+\cos\alpha}{2}}{S_{\text{круг}} \cdot \frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{I_m}{S_{\text{круг}}} = \text{const.}$$



2.16.10 Сферична светилка со дијаметар 400 mm е направена од опално стакло и е поставена на височина h=5 m над рамната површина на земјата. Проекцијата на центарот на сферата врз површината на земјата е означена со A. Во точките на површината на земјата кои се наоѓаат на растојание b=4 m од точката A светилката создава осветленост од 40 lx. а) Колкава е осветленоста во точката C која се наоѓа на површината на земјата на растојание $b+b_1$=8 m од точката A? б) Колкав е флуксот што го зрачи светилката врз кругот на површината на земјата, чиј центар е во точката A и радиусот му е еднаков на b и колкава е осветленоста на тој круг?

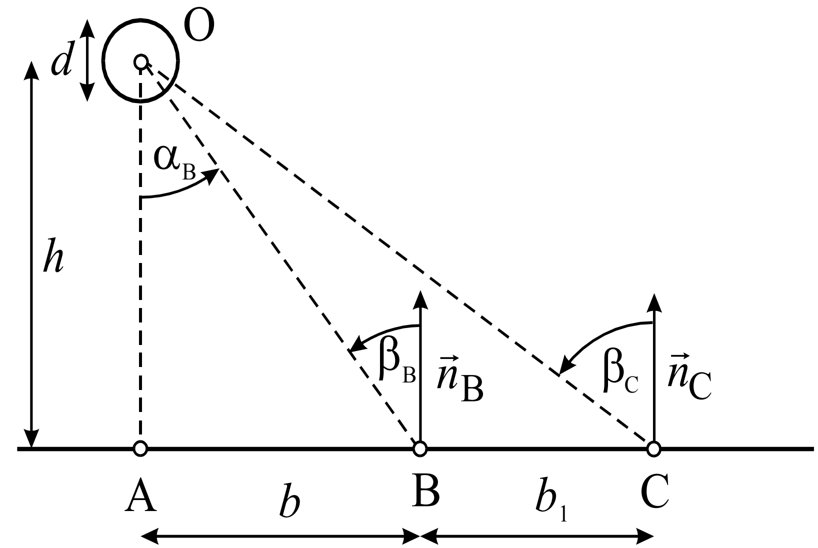
$$I = \text{const.}$$

$$h = 5\ \text{m};\ d = 0{,}4\ \text{m};\ b = b_1 = 4\ \text{m};\ E_\text{B} = 40\ \text{lx}$$

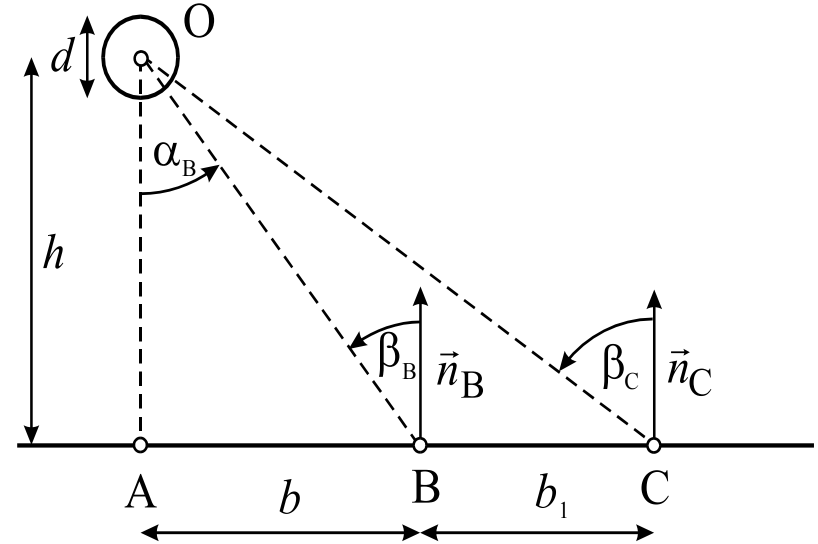
$$E_\text{C} = ?\quad \Phi_\text{круг} = ?\quad E_\text{круг} = ?\quad E_\text{A} = ?$$

$$E_\text{C} = \frac{I_\text{O–C} \cdot \cos\beta_\text{C}}{\overline{\text{OC}}^2}$$

$$E_\text{B} = \frac{I_\text{O–B} \cdot \cos\beta_\text{B}}{\overline{\text{OB}}^2} = 40\ \text{lx}$$



2.16.10



$$\beta_B = \alpha_B = \arctan\frac{b}{h} = \arctan\frac{4}{5} = 38{,}66^\circ$$

$$\beta_C = \arctan\frac{b+b_1}{h} = \arctan\frac{8}{5} \approx 58^\circ$$

$$I_{O-B} = I = \frac{E_B \cdot \overline{OB}^2}{\cos\beta_B} = \frac{40\cdot\left(4^2+5^2\right)}{\cos 38{,}66^\circ} \approx 2100 \text{ cd}$$

$$E_C = \frac{I_{O-C}\cdot\cos\beta_C}{\overline{OC}^2} = \frac{2100\cdot\cos 58^\circ}{8^2+5^2} = 12{,}5 \text{ lx}$$

$$\Phi_{\text{круг}} = I\cdot\Omega_{\text{круг}} = I\cdot 2\pi\cdot(1-\cos\alpha_B) = 2100\cdot 2\pi\cdot\left(1-\cos 38{,}66^\circ\right) \approx 2891 \text{ lm}$$

$$E_{\text{круг}} = E_{\text{средна}} = \frac{\Phi_{\text{круг}}}{S_{\text{круг}}} = \frac{2891}{\pi\cdot 4^2} = 57{,}5 \text{ lx}$$

$$E_A = \frac{I_{O-A}\cdot\cos\beta_A}{\overline{OA}^2} = \frac{2100\cdot\cos 0^\circ}{5^2} = 84 \text{ lx}$$

2.16.11 Униформно дифузен диск има дијаметар *D*=10 cm. Дискот се наоѓа на височина *h*=5 m над хоризонталната рамнина што ја осветлува и е паралелен со неа. Со A е означена проекцијата на средиштето на дискот врз осветлуваната рамнина. Ако осветленоста во точката A е 200 lx, да се определи: а) осветленоста во точката B што се наоѓа на осветлуваната рамнина на растојание *d*=*h* од точката A; б) вкупниот светлински флукс на дискот, ако тој зрачи од едната страна; в) средната сферна и средната цилиндрична осветленост во точката B што се наоѓа вертикално над точката A на растојание *h*/2 од неа.

$$I_\alpha = I_0 \cdot \cos\alpha$$

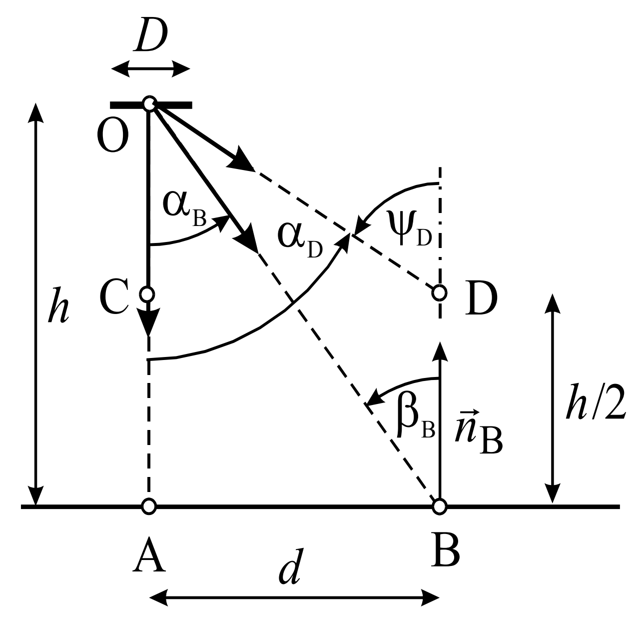
$$h = d = 5\ \text{m};\ D = 0{,}1\ \text{m};\ E_\text{A} = 200\ \text{lx}$$

$$E_\text{B} = ?\quad E_{\text{C}_\text{цил.}} = ?\quad E_{\text{C}_\text{сф.}} = ?$$

$$E_\text{A} = \frac{I_\text{O–A}\cdot\cos\beta_\text{A}}{\overline{\text{OA}}^2} = \frac{I_0\cdot\cos\alpha_\text{A}\cdot\cos\beta_\text{A}}{\overline{\text{OA}}^2} = 200\ \text{lx}$$

$$\beta_\text{A} = \alpha_\text{A} = 0^\circ \qquad \beta_\text{B} = \alpha_\text{B} = \arctan\frac{d}{h} = \arctan\frac{5}{5} = 45^\circ$$

$$I_0 = \frac{E_\text{A}\cdot h^2}{\cos\alpha_\text{A}\cdot\cos\beta_\text{A}} = \frac{200\cdot 5^2}{\cos 0^\circ\cdot\cos 0^\circ} \approx 5000\ \text{cd}$$

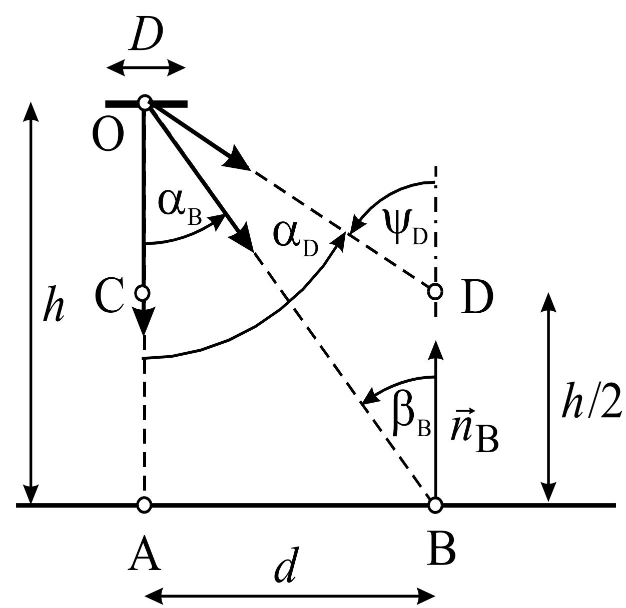


2.16.11 $E_{\mathrm{B}} = \dfrac{I_{\mathrm{O-B}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{B}}}{\overline{\mathrm{OB}}^2} = \dfrac{I_0 \cdot \cos\alpha_{\mathrm{B}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{B}}}{h^2 + d^2} = \dfrac{5000 \cdot \cos^2 45^\circ}{5^2 + 5^2} = 50\ \mathrm{lx}$

$$\Phi_{1/2} = \pi \cdot I_0 = 15708\ \mathrm{lm}$$

$$E_{\mathrm{D_{сф.}}} = \frac{I_{\mathrm{O-D}}}{4 \cdot \overline{\mathrm{OD}}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos\alpha_{\mathrm{D}}}{4 \cdot \left(h^2/4 + d^2\right)} = \frac{5000 \cdot \cos 63{,}4^\circ}{4 \cdot \left(2{,}5^2 + 5^2\right)} = 17{,}9\ \mathrm{lx}$$

$$E_{\mathrm{C_{сф.}}} = \frac{I_{\mathrm{O-C}}}{4 \cdot \overline{\mathrm{OC}}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos 0^\circ}{4 \cdot (h/2)^2} = \frac{5000}{5^2} = 200\ \mathrm{lx}$$



$$E_{\mathrm{C_{цил.}}} = \frac{I_{\mathrm{O-C}} \cdot \sin\psi_{\mathrm{C}}}{\pi \cdot \overline{\mathrm{OC}}^2} = \frac{I_0 \cdot \sin 0^\circ}{\pi \cdot (h/2)^2} = 0\ \mathrm{lx}$$

$$E_{\mathrm{D_{цил.}}} = \frac{I_{\mathrm{O-D}} \cdot \sin\psi_{\mathrm{D}}}{\pi \cdot \overline{\mathrm{OD}}^2} = \frac{5000 \cdot \cos 63{,}4^\circ \cdot \sin 63{,}4^\circ}{\pi \cdot \left(2{,}5^2 + 5^2\right)} = 20{,}4\ \mathrm{lx}$$

$$\alpha_{\mathrm{D}} = \arctan\frac{5}{2{,}5} = 63{,}4^\circ = \psi_{\mathrm{D}}$$

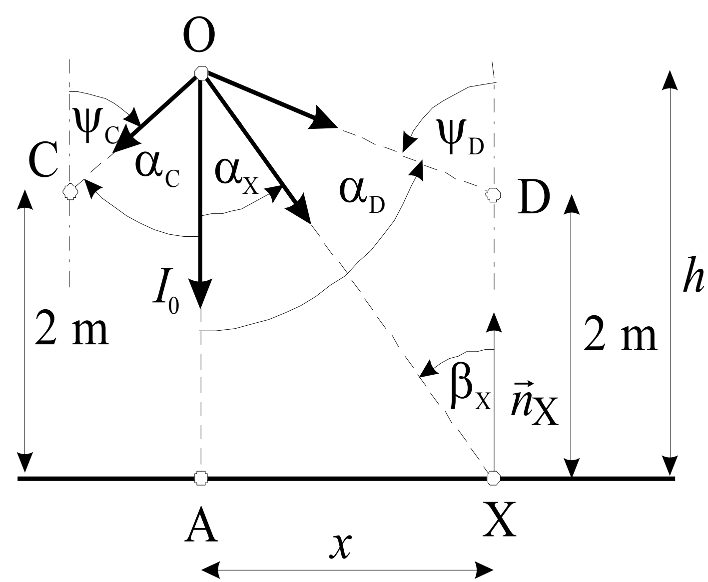
2.16.12 Светлински извор е поставен на височина *h*=3 m над хоризонталната рамна површина. Светлинската јачина на изворот зависи од аголот *a* што го зафаќа набљудуваниот правец со вертикалата. Зависноста е изразена со дадената релација: а) Во кои точки од хоризонталната рамнина осветленоста е најголема? б) Колкава е средната сферна осветленост во точките што се наоѓаат на височина од 2 m над точките определени под а)? в) Колкава е средната цилиндрична осветленост во точките што се наоѓаат на височина 2 m над хоризонталната рамнина и на растојание 1,1 m од изворот?

$$h = 3\ \mathrm{m};\ I_\alpha = I_m \cdot \sin\alpha = 10000 \cdot \sin\alpha;\ \overline{\mathrm{OC}} = 1{,}1\ \mathrm{m}$$

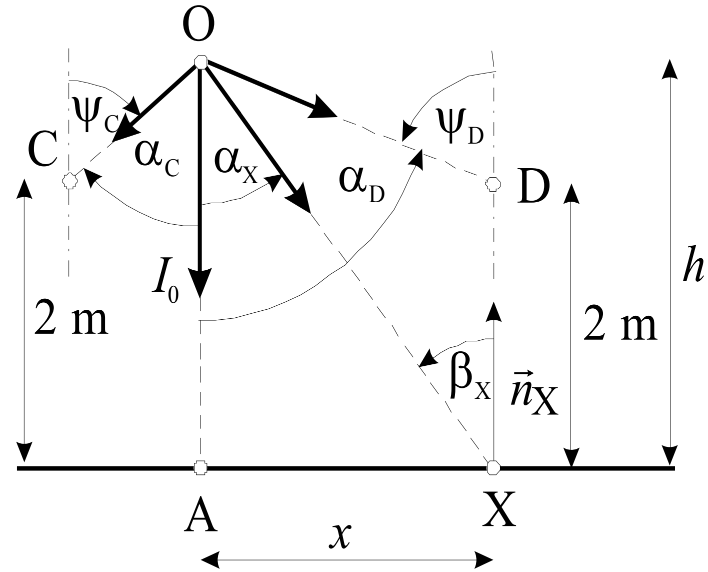
$$\max E_{\mathrm{X}} = \frac{I_{\mathrm{O-X}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{X}}}{\overline{\mathrm{OX}}^2} = \frac{I_m \cdot \sin\alpha_{\mathrm{X}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{X}}}{x^2 + h^2}$$

$$E_{\mathrm{X}} = \frac{I_m \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} \cdot \dfrac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}}{x^2+h^2} = \frac{I_m \cdot x \cdot h}{\left(x^2+h^2\right)^2} = f(x)$$

$$E_{\mathrm{X}} = \frac{I_m \cdot \sin\alpha_{\mathrm{X}} \cdot \cos\alpha_{\mathrm{X}}}{\dfrac{h^2}{\cos^2\alpha_{\mathrm{X}}}} = \frac{I_m \cdot \sin\alpha_{\mathrm{X}} \cdot \cos^3\alpha_{\mathrm{X}}}{h^2} = f(\alpha_{\mathrm{X}})$$



2.16.12



$$\frac{dE_X}{d\alpha_X} = \frac{I_m}{h^2} \cdot \left(\cos^4 \alpha_X - 3 \cdot \sin^2 \alpha_X \cdot \cos^2 \alpha_X\right) = 0$$

$$\cos^2 \alpha_X \left(\cos^2 \alpha_X - 3 \cdot \sin^2 \alpha_X\right) = 0$$

a) $\cos^2 \alpha_X = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_X = \pi/2 \ \Rightarrow\ x \to \infty$

b) $\cos^2 \alpha_X - 3 \cdot \sin^2 \alpha_X = 0 \ \Rightarrow$

$$\mathrm{tg}^2 \alpha_X = \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ \alpha_X = 30^\circ \ \Rightarrow\ x = \sqrt{3}\ \mathrm{m}$$

$$\psi_C = \alpha_C = \arccos \frac{1}{1{,}1} = 24{,}6^\circ$$

$$E_{C_{\text{цил.}}} = \frac{I_{24{,}6^\circ} \cdot \sin 24{,}6^\circ}{\pi \cdot 1{,}1^2} \approx 456\ \mathrm{lx}$$

$$\alpha_D = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ$$

$$E_{D_{\text{сф.}}} = \frac{I_m \cdot \sin 60^\circ}{4 \cdot \left(\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2\right)} \approx 541\ \mathrm{lx}$$

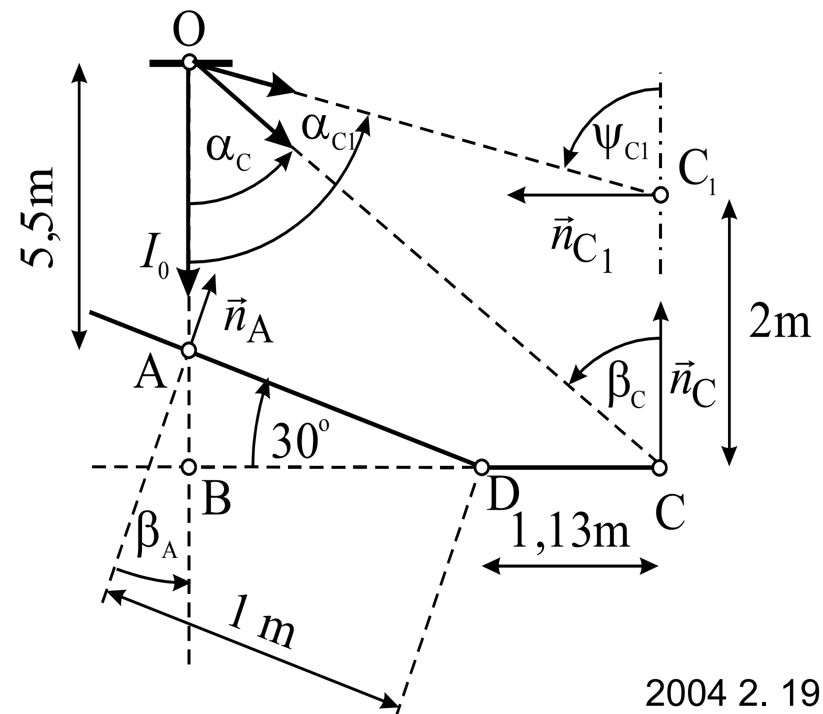
2.16.13 Точката O е средишна точка на рамна површина на светлински извор што зрачи според Ламбертовиот закон. Нормалата на светлечката површина се поклопува со правецот OB. Правецот OB е нормален на хоризонталната рамнина во која лежат точките B, C и D. Точките A и D лежат на коса рамнина што е нормална на рамнината на цртежот. Светлинската јачина на изворот во правецот OB е 1000 cd. Растојанието помеѓу точките O и A изнесува 5,5 m, помеѓу точките A и D изнесува еден метар и помеѓу точките C и D изнесува 1,13 m. Да се пресмета: а) осветленоста на косата површина во точката A; б) хоризонталната осветленост во точката A; в) хоризонталната осветленост во точката C; г) вертикалната осветленост во точката A; д) вертикалната осветленост во точката C_1, што се наоѓа вертикално над точката C и на растојание 2 m од неа; ѓ) средната сферна и средната цилиндрична осветленост во точката C_1.

$$I_\alpha = 1000 \cdot \cos\alpha$$

$$E_{\mathrm{A}} = \frac{I_{\mathrm{O-A}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{A}}}{\overline{\mathrm{OA}}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos 30^\circ}{5{,}5^2} \approx 28{,}6\ \mathrm{lx}$$

$$E_{\mathrm{A_{хор.}}} = \frac{I_{\mathrm{O-A}} \cdot \cos\beta'_{\mathrm{A}}}{\overline{\mathrm{OA}}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos 0^\circ}{5{,}5^2} \approx 33{,}1\ \mathrm{lx}$$

$$E_{\mathrm{A_{верт.}}} = \frac{I_{\mathrm{O-A}} \cdot \cos\beta''_{\mathrm{A}}}{\overline{\mathrm{OA}}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos 90^\circ}{5{,}5^2} = 0\ \mathrm{lx}$$



2.16.13

$$E_{\mathrm{C}} = E_{\mathrm{C}_{\text{хор.}}} = \frac{I_{\alpha_{\mathrm{C}}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{C}}}{\overline{\mathrm{OC}}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos\alpha_{\mathrm{C}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{C}}}{\overline{\mathrm{OC}}^2} = 22{,}5\ \mathrm{lx}$$

$$E_{\mathrm{C}_{1\text{верт.}}} = \frac{I_{\alpha_{\mathrm{C}_1}} \cdot \cos\beta_{\mathrm{C}_1}}{\overline{\mathrm{OC}_1}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos\alpha_{\mathrm{C}_1} \cdot \cos\left(90^\circ - \psi_{\mathrm{C}_1}\right)}{\overline{\mathrm{OC}_1}^2} \approx 20\ \mathrm{lx}$$

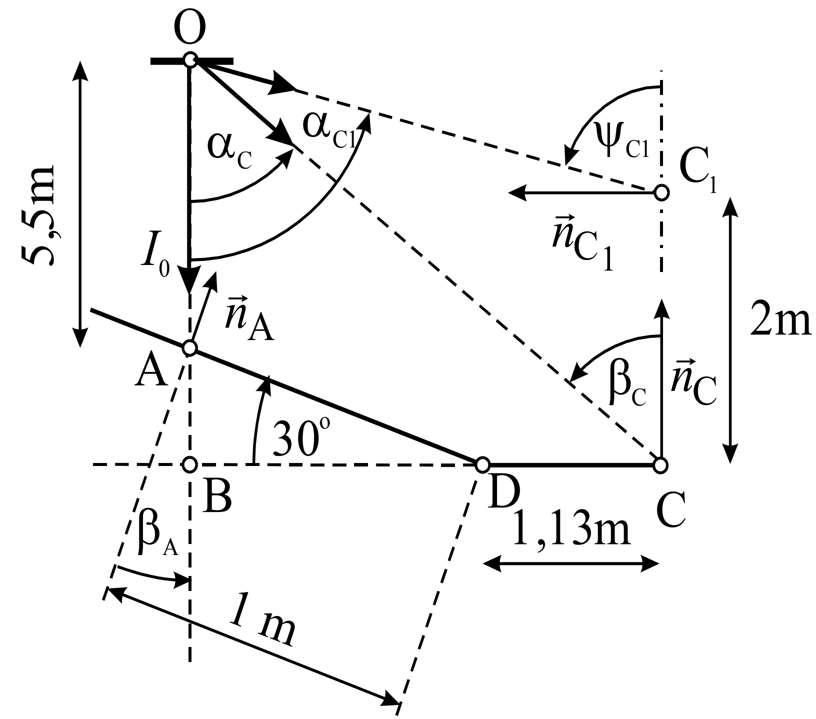
$$\overline{\mathrm{OB}} = 6\ \mathrm{m};\ \ \overline{\mathrm{BC}} = 2\ \mathrm{m}$$

$$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2$$

$$\alpha_{\mathrm{C}} = \beta_{\mathrm{C}} \approx 18{,}4^\circ$$

$$\alpha_{\mathrm{C}_1} = \psi_{\mathrm{C}_1} \approx 26{,}6^\circ$$

$$\overline{\mathrm{OC}_1}^2 = \left(\overline{\mathrm{OB}} - 2\right)^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2$$



$$E_{\mathrm{C}_{1\text{сф.}}} = \frac{I_{\alpha_{\mathrm{C}_1}}}{4 \cdot \overline{\mathrm{OC}_1}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos\alpha_{\mathrm{C}_1}}{4 \cdot \overline{\mathrm{OC}_1}^2} \approx 11{,}2\ \mathrm{lx}$$

$$E_{\mathrm{C}_{1\text{цил.}}} = \frac{I_{\alpha_{\mathrm{C}_1}} \cdot \sin\psi_{\mathrm{C}_1}}{\pi \cdot \overline{\mathrm{OC}_1}^2} = \frac{I_0 \cdot \cos\alpha_{\mathrm{C}_1} \cdot \sin\psi_{\mathrm{C}_1}}{\pi \cdot \overline{\mathrm{OC}_1}^2} \approx 6{,}4\ \mathrm{lx}$$

2.16.14 Сфера и диск зрачат според Ламбертовиот закон и имаат еднакви светлински флуксови: $\Phi_{\text{сфера}}=\Phi_{\text{диск}}$=6280 lm. Меѓусебната положба на изворите е прикажана на сликата 2.15.3, при што е H=b=2 m. Во однос на точката M двата извора можат да се сметаат за точкасти. Дебелината на дискот може да се занемари. Дискот зрачи од двете страни. а) Да се пресмета резултантната хоризонтална осветленост во точката M. б) Колкава ќе биде осветленоста во точката M ако дискот се заврти за агол од 90° околу својата оска на симетријата што е нормална на рамнината на цртежот?

$$\Phi_{\text{сфера}}=\Phi_{\text{диск}}=6280\ \text{lm};\ \ h=b=2\ \text{m};\ E_{\text{M}}=?$$

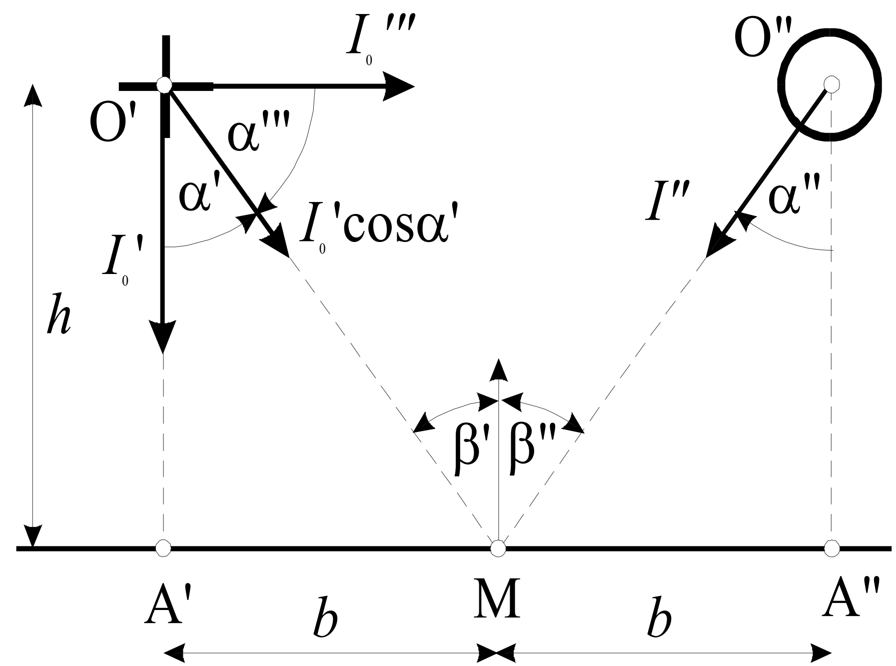
$$E_{\text{M}}=E_{\text{M}_{\text{сфера}}}+E_{\text{M}_{\text{диск}}}$$

$$L'=\text{const.}\Rightarrow I'_{\alpha}=I'_0\cdot\cos\alpha$$

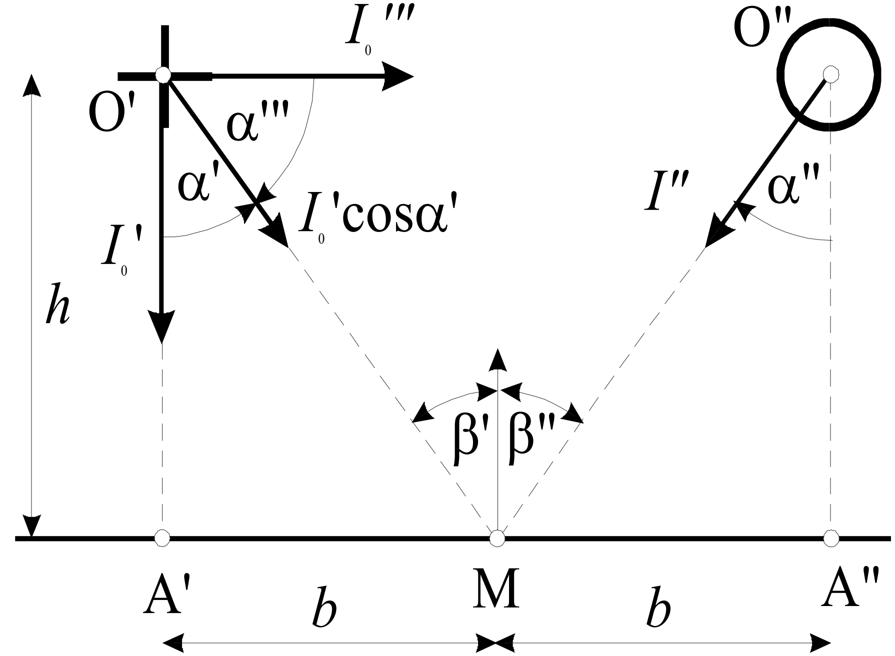
$$L''=\text{const.}\Rightarrow I''_{\alpha}=I''=\text{const.}$$

$$h=b\Rightarrow \alpha'=\alpha''=\beta'=\beta''=\pi/4$$

$$E_{\text{M}}=\frac{I'_0\cdot\cos^2 45^\circ}{2\cdot h^2}+\frac{I''\cdot\cos 45^\circ}{2\cdot h^2}$$



2.16.14



$$\Phi_{\text{диск}} = 2\pi \cdot I_0' \Rightarrow I_0' = \frac{6280}{2\pi} = 1000 \text{ cd}$$

$$\Phi_{\text{сфера}} = 4\pi \cdot I'' \Rightarrow I'' = \frac{6280}{4\pi} = 500 \text{ cd}$$

$$E_{\text{M}} = \frac{I_0' \cdot \cos^2 45^\circ}{2 \cdot h^2} + \frac{I'' \cdot \cos 45^\circ}{2 \cdot h^2} \qquad E_{\text{M}} = 62{,}5 + 44{,}2 = 106{,}7 \text{ lx}$$

$$\alpha''' = \alpha' \Rightarrow I_\alpha' = I_\alpha''' \Rightarrow E_{\text{M}}''' = E_{\text{M}}$$

2.16.15 Два еднакви униформни светлински извора се поставени во точките О’ и О’’. Изворите се со светлинска јачина *I*=200 cd и со нив се осветлува една полусфера со радиус *R*=5 m. Да се пресмета осветленоста на полусферата во точките: A, B, C и D.

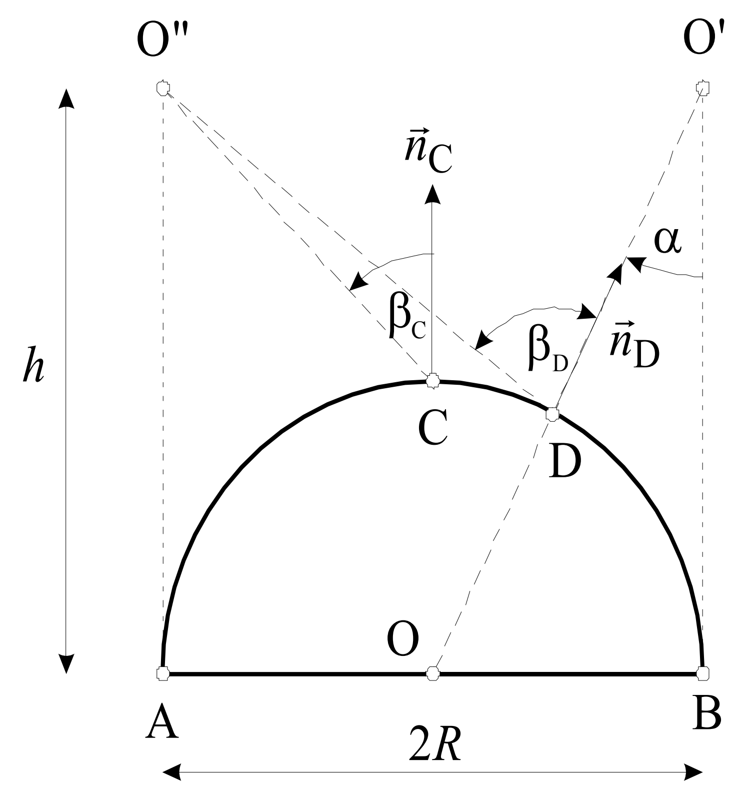
$$I = 200\ \text{cd};\ h = 2R = 10\ \text{m}$$

$$E_\text{A} = ?\ E_\text{B} = ?\ E_\text{C} = ?\ E_\text{D} = ?$$

$$E_\text{A} = E_{\text{A}_\text{верт.}} = \frac{I'' \cdot \cos 90^\circ}{h^2}$$

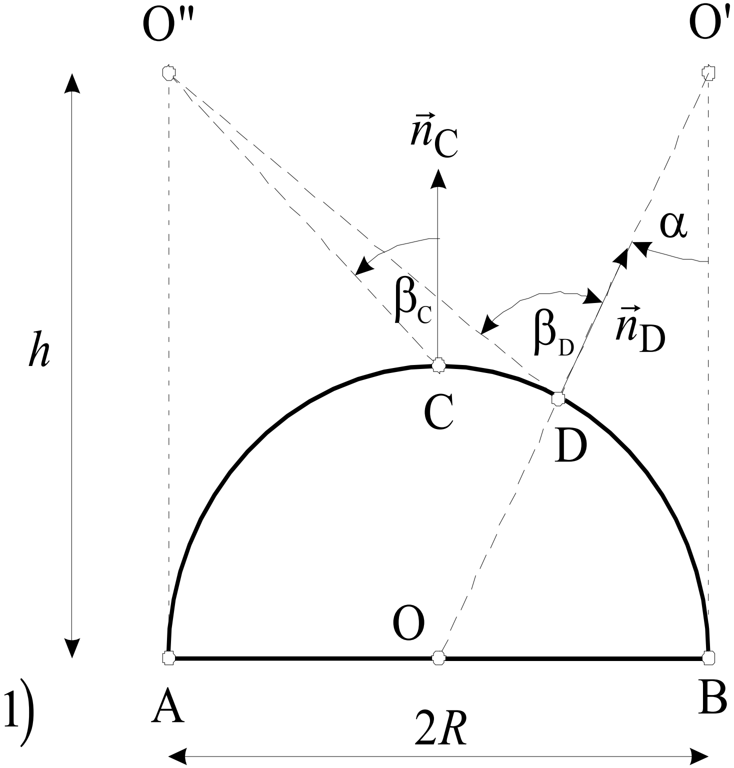
$$E_\text{B} = E_{\text{B}_\text{верт.}} = \frac{I' \cdot \cos 90^\circ}{h^2} = 0$$

$$E_{\text{A}_\text{хор.}} = E_{\text{B}_\text{хор.}} = \frac{200 \cdot \cos 0^\circ}{h^2} = 2\ \text{lx}$$



2.16.15

$$\beta'_C = \beta''_C = \beta_C = 45^\circ$$



$$E_C = \frac{I' \cdot \cos\beta'_C}{2 \cdot R^2} + \frac{I'' \cdot \cos\beta''_C}{2 \cdot R^2} = 2 \cdot \frac{200 \cdot \cos 45^\circ}{2 \cdot 5^2} \approx 5{,}67 \text{ lx}$$

$$E_D = \frac{I' \cdot \cos 0^\circ}{\overline{\mathrm{O'D}}^2} + \frac{I'' \cdot \cos\beta_D}{\overline{\mathrm{O''D}}^2}$$

$$\alpha = \arctan\frac{R}{2 \cdot R} = 26{,}6^\circ \qquad \overline{\mathrm{O'D}} = \overline{\mathrm{OD}} - R = R \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$\overline{\mathrm{O''D}}^2 = \overline{\mathrm{O'O''}}^2 + \overline{\mathrm{O'D}}^2 - 2 \cdot \overline{\mathrm{O'O''}} \cdot \overline{\mathrm{O'D}} \cdot \cos\left(90^\circ - \alpha\right) \qquad \overline{\mathrm{O''D}}^2 = 1{,}82 \cdot R$$

$$\frac{\overline{\mathrm{O'O''}}}{\sin\beta_D} = \frac{\overline{\mathrm{O''D}}}{\sin\left(90^\circ - \alpha\right)} \Rightarrow \beta_D = 79^\circ$$

$$E_D = \frac{200}{R^2} \cdot \left[\frac{1}{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2} + \frac{\cos 79^\circ}{1{,}82^2}\right] \approx 5{,}7 \text{ lx}$$