

## Плоштина на површина помеѓу два кружни исечока (задача 3.2)

Равенките на круговите се

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 180^2, \\(x - 60)^2 + y^2 &= 150^2,\end{aligned}$$

од каде што со одземање на двете равенки се добива

$$\begin{aligned}x^2 - (x - 60)^2 &= 180^2 - 150^2 = (180 - 150) \cdot (180 + 150) \\120x - 3600 &= 9900 \\x &= \frac{9900 + 3600}{120} = 112,5 \text{ m}\end{aligned}$$

Површината на исечкото помеѓу двата кружни исечока е еднаква на разликата од следните интеграли

$$\begin{aligned}P &= \int_{112,5}^{210} \sqrt{150^2 - (x - 60)^2} dx - \int_{112,5}^{180} \sqrt{180^2 - x^2} dx = \\&= \int_{52,5}^{150} \sqrt{150^2 - x^2} dx - \int_{112,5}^{180} \sqrt{180^2 - x^2} dx.\end{aligned}$$

Најпрво ќе изведеме формула за следниот определен интеграл

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Ја воведуваме замената

$$x = a \sin t,$$

со што интегралот станува

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 t dt = a^2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt,$$

каде што

$$\begin{aligned}t_1 &= \arcsin \frac{x_1}{a}, \\t_2 &= \arcsin \frac{x_2}{a}.\end{aligned}$$

Решението на интегралот е

$$I = \frac{a^2}{2} \left( \frac{\sin 2t}{2} + t \right) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Во конкретниот случај имаме

$$P_1 = \int_{52,5}^{150} \sqrt{150^2 - x^2} dx = \frac{150^2}{2} \left( \frac{\sin 2t}{2} + t \right) \Big|_{\arcsin\left(\frac{52,5}{150}\right)}^{\arcsin(1)} = \frac{150^2}{2} \left( \frac{\sin 2t}{2} + t \right) \Big|_{0,3576}^{1,5708}$$
$$P_1 = \frac{150^2}{2} \left[ \frac{\sin(2 \cdot 1,5708) - \sin(2 \cdot 0,3576)}{2} + 1,5708 - 0,3576 \right] = 9960,332 \text{ m}^2$$
$$P_2 = \frac{180^2}{2} \left[ \frac{\sin(2 \cdot 1,5708) - \sin(2 \cdot 0,6751)}{2} + 1,5708 - 0,6751 \right] = 6605,944 \text{ m}^2$$
$$P = P_1 - P_2 = 3354,388 \text{ m}^2$$

До истиот резултат можеме да дојдеме со примена на Matlab на следниот начин

zadaca\_3\_2.m

```
1 f = inline('sqrt(180^2 - x.^2)');  
2 g = inline('sqrt(150^2 - x.^2)');  
3 P = quadl(g,52.5,150) - quadl(f,112.5,180);  
4 fprintf('P = %.3f m^2\n', P);
```

```
>> zadaca_3_2
```

```
P = 3354.388 m^2
```