

Високонапонски мрежи и системи

Стабилност на работа на ЕЕС

М. Тодоровски

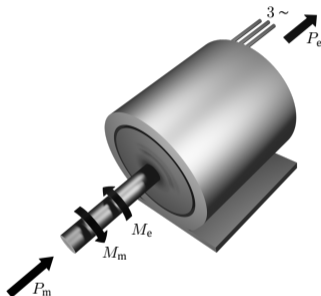
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Факултет за електротехника и информациски технологии
mirko@feit.ukim.edu.mk, pees.feit.ukim.edu.mk



- Електромеханички преодни процеси при промена на режимот на работа на ЕЕС
 - Нормални мали промени кои постојано се случуваат поради промени на оптоварувањето или промени во регулацијата на генераторите – **статичка стабилност**
 - Нагли значителни промени на режимот на работа на системот поради појава на куси врски или испад на потрошувач, генератор или елемент од мрежата – **динамичка стабилност**
- Преодни процеси \Rightarrow диференцијални равенки
- Анализите на стабилноста на ЕЕС овде ќе имаат „инженерски“ карактер, што значи дека ќе правиме разни занемарувања и упростувања, но такви, кои квалитативно нема да ја изменат сликата на посматраните појави
- Упростувањата ќе ни овозможат примена на познати практични математички методи и постапки, коишто на доволно брз и едноставен начин ќе ни дадат резултати со задоволителна точност

Равенка на движење на синхрон агрегат

Синхрон агрегат претставува машинска група која се состои од турбина и синхрон генератор



$$J \frac{d\omega}{dt} = M_m - M_e$$

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e \quad \text{нелинеарност: } \omega \frac{d\omega}{dt}$$

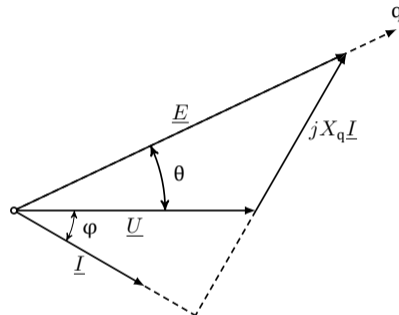
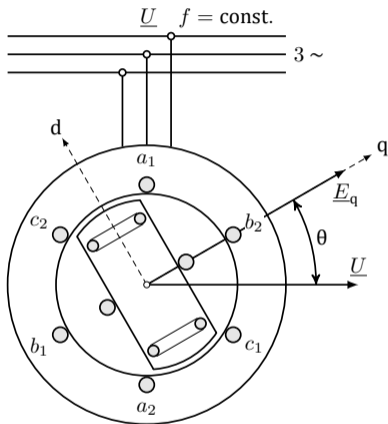
$$\omega \approx \omega_0 = 2\pi f$$

$$J\omega_0 \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e$$

Време на залет T_J – време за кое што агрегатот ќе се залета од $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$ под дејство на константен момент $M_n = S_n/\omega_0$ (момент при $P = S_n$ и $\cos \varphi = 1$)

$$T_J = \frac{J\omega_0}{M_n} = \frac{J\omega_0^2}{S_n} \quad \frac{S_n T_J}{\omega_0} \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e$$

Агол на изместување



$$\omega = \omega_0 + \omega' \quad \rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega' t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega' = \omega - \omega_0 \quad \omega = \omega_0 + \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

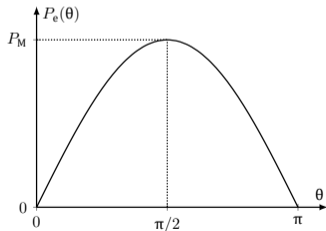
Агол на изместување

Замената на брзината ω со аголот на изместување θ пред сè ја вршиме затоа што електричната моќност P_e може да се изрази во зависност од истиот тој агол.

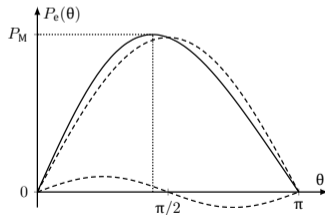
$$\frac{S_n T_J}{\omega_0} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \Delta P(\theta) = P_m - P_e(\theta).$$

$$P_e = \frac{E_q \cdot U}{X_d} \cdot \sin \theta = P_M \cdot \sin \theta$$

$$P_e = \frac{E_q \cdot U}{X_d} \cdot \sin \theta + \frac{U^2}{2} \cdot \frac{X_d - X_q}{X_d \cdot X_q} \cdot \sin 2\theta$$



турбогенератор



хидрогенератор

Асинхрона моќност

Се јавува во случајот кога постои релативно движење на роторот и вртливото магнетно поле ($\omega \neq \omega_0$) и се стреми да ги израмни брзините ω и ω_0

$$P_a = K_p \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{S_n T_J}{\omega_o} \frac{d^2\theta}{dt^2} + K_p \frac{d\theta}{dt} = P_m - P_e(\theta)$$

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} + K_p \frac{d\theta}{dt} = P_m - P_e(\theta)$$

константа на инерција

$$M = \frac{S_n T_J}{\omega_0} \left[\frac{\text{MW} \cdot \text{s}^2}{\text{rad}} \right] \quad \text{или} \quad M = \frac{S_n T_J}{360f} \left[\frac{\text{MW} \cdot \text{s}^2}{\text{el}} \right]$$

за турбоагрегати $T_J = 4 \div 12 \text{ s}$

за хидроагрегати $T_J = 4 \div 9 \text{ s}$

Упростувања

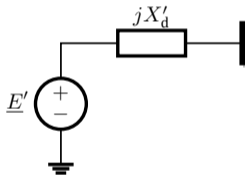
- Занемарување на придушниот момент $K_p d\theta/dt$
Без придушување осцилациите во преодниот режим ќе траат бесконечно долго време. Доколку за решението добиеме дека има осцилаторен карактер тоа ќе значи дека системот е стабилен.
- Занемарување на дејството на турбинскиот регулатор
Турбинскиот регулатор делува за 0,5 до 1 s од почетокот на преодниот режим. Но тој нема да ја измени сликата на проблемот, бидејќи прашањето дали системот е стабилен или не е веќе решено во периодот кога турбинскиот регулатор сè уште не проработил.
- Занемарување на испакнатоста на половите кај хидрогенераторите

$$\frac{E_q U}{X_d} \sin \theta \gg \frac{U^2}{2} \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \sin 2\theta \quad \Rightarrow \quad P_e = \frac{E_q U}{X_d} \sin \theta$$

Амплитудата на вториот хармоник изнесува обично само 10%–15% од амплитудата на основната синусоида и има многу мало влијание на преодните процеси.

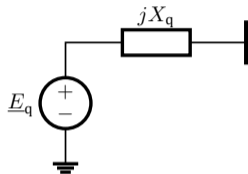
Модел на синхрон генератор при анализите на динамичка стабилност

Во преодните режими, со оглед на кусото времетраење на суптранзиентниот период, за сето време додека трае преодниот процес ќе можеме да сметаме дека реактанцијата на синхронниот генератор е еднаква на транзиентната реактанција X'_d .



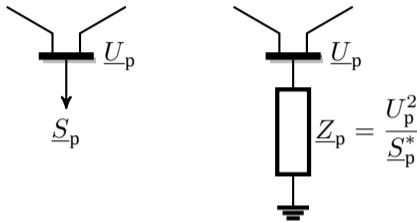
Модел на синхрон генератор при анализите на статичка стабилност

Синхрони генератори без автоматска регулација на возбудата



- Генератори со автоматски регулатор од пропорционален тип се претставуваат со моделот за динамичка стабилност
- Генератори со брз автоматски регулатор на возбудата се моделираат со идеален напонски генератор

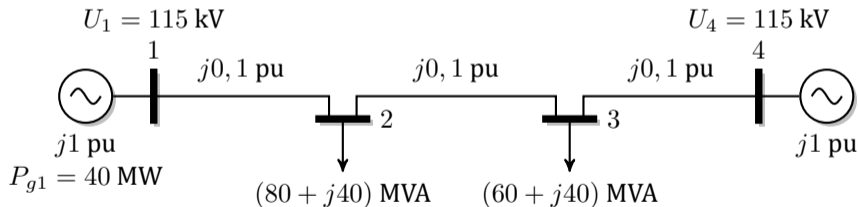
Еквивалентирање на потрошувачите



- Потрошувачите се еквивалентираат со константна импеданција.
- Потрошувачите ги третираме како „дел од мрежата“, така што нивните импеданции ќе ги „вградиме“ во мрежата со што потрошувачките јазли стануваат пасивни.
- Со редукција на матрицата на адмитанции на мрежата можеме да ги елиминираме сите пасивни јазли со што ќе оперираме само со „генераторските јазли“.

Пример 5.1

За системот прикажан на сликата да се одреди матрицата на адмитанции за генераторските јазли. Реактанциите на сите водови изнесуваат $0,1 \text{ pu}$, додека реактанциите на двата генератора се по 1 pu . Активната моќност на генераторот во јазелот 1, како и моќностите на потрошувачите се прикажани на сликата. Генераторите ги одржуваат напоните на јазли на кои се приклучени на вредност од 115 kV , при што јазелот 4 е балансен. Базниот напон изнесува 110 kV , додека базната моќност е 100 MVA .



Пример 5.1

programi/stab/ees_5.m

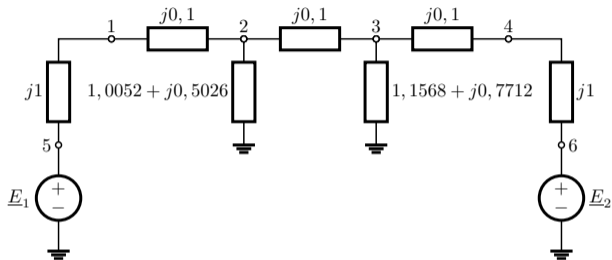
```
1 function ees = ees_5()
2 ees.Sb = 100;
3 ees.Us = 115/110;
4 ees.jazli = [
5     1 110 -40  0
6     2 110  80 40
7     3 110  60 40
8     4 110   0  0
9 ];
10 ees.granki = [
11     1  2  0  0.1  0
12     2  3  0  0.1  0
13     3  4  0  0.1  0
14 ];
15 ees.pv = [
16     1 115/110
17 ];
18 ees.gen = [
19     1 1.0
20     4 1.0
21 ];
```

Пример 5.1

```
>> addpath('..../naponi');  
>> U = naponi('ees_5')/110  
U =  
    1.0455  
    1.0026  
    1.0013  
    1.0455
```

$$\underline{Z}_{p2} = \frac{U_2^2}{\underline{S}_2^*} = \frac{1,0026^2}{0,8 - j0,4} = (1,0052 + j0,5026) \text{ pu};$$
$$\underline{Z}_{p3} = \frac{U_3^2}{\underline{S}_3^*} = \frac{1,0013^2}{0,6 - j0,4} = (1,1568 + j0,7712) \text{ pu}.$$

Пример 5.1



a)

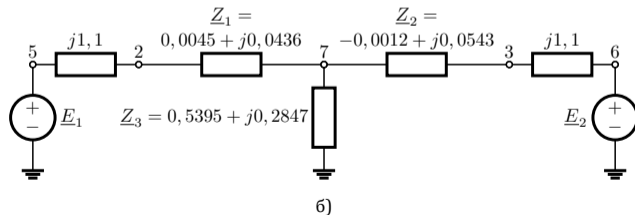
Трансфигурација триаголник-свезда (2-3, 2-земја и 3-земја)

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{j0,1 \cdot (1,0052 + j0,5026)}{j0,1 + 1,0052 + j0,5026 + 1,1568 + j0,7712} = \\ &= (0,0045 + j0,0436) \text{ pu;} \end{aligned}$$

Пример 5.1

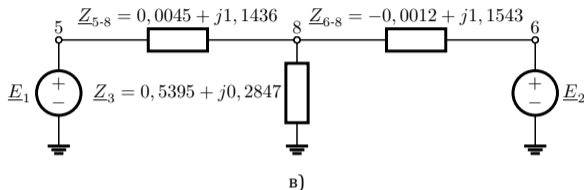
$$\underline{Z}_2 = \frac{j0,1 \cdot (1,1568 + j0,7712)}{j0,1 + 1,0052 + j0,5026 + 1,1568 + j0,7712} =$$
$$= (-0,0012 + j0,0543) \text{ pu};$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{(1,0052 + j0,5026) \cdot (1,1568 + j0,7712)}{j0,1 + 1,0052 + j0,5026 + 1,1568 + j0,7712} =$$
$$= (0,5395 + j0,2847) \text{ pu};$$



Пример 5.1

Сериска врска 5-2 со 2-7 и 6-3 со 3-7



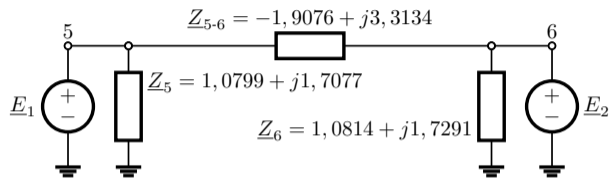
Свездата помеѓу јазлите 5, 6 и земјата ја трансформираме во триаголник

$$\underline{Z}_{5-6} = \underline{Z}_{5-8} + \underline{Z}_{6-8} + \frac{\underline{Z}_{5-8} \cdot \underline{Z}_{6-8}}{\underline{Z}_3} = (-1,9076 + j3,3134) \text{ pu};$$

$$\underline{Z}_5 = \underline{Z}_{5-8} + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_{5-8} \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_{6-8}} = (1,0799 + j1,7077) \text{ pu};$$

$$\underline{Z}_6 = \underline{Z}_{6-8} + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_{6-8} \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_{5-8}} = (1,0814 + j1,7291) \text{ pu}.$$

Пример 5.1



г)

Матрицата на адмитанции на генераторските јазли 5 и 6

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}_5} + \frac{1}{\underline{Z}_{5-6}} & -\frac{1}{\underline{Z}_{5-6}} \\ -\frac{1}{\underline{Z}_{5-6}} & \frac{1}{\underline{Z}_6} + \frac{1}{\underline{Z}_{5-6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1340 - j0,6450 & 0,1305 + j0,2267 \\ 0,1305 + j0,2267 & 0,1295 - j0,6424 \end{bmatrix} \text{ pu.}$$

Аглови карактеристики на моќност

Вектор на инјектирани струи во јазлите

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{E}},$$

Вектор на инјектирани моќности во јазлите

$$\underline{\mathbf{S}} = \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot (\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{E}})^*$$

За елементите од матрицата на адмитанции користиме правоаголна форма

$\underline{Y}_{ik} = G_{ik} + jB_{ik}$, а за електромоторните сили експоненцијална форма $\underline{E}_k = E_k \cdot e^{j\theta_k}$.

$$\begin{aligned} \underline{S}_i &= \underline{E}_i \left(\sum_{k=1}^{N_g} \underline{Y}_{ik} \cdot \underline{E}_k \right)^* = E_i e^{j\theta_i} \left[\sum_{k=1}^{N_g} (G_{ik} + jB_{ik}) \cdot E_k \cdot e^{j\theta_k} \right]^* = \\ &= E_i \sum_{k=1}^{N_g} (G_{ik} - jB_{ik}) \cdot E_k \cdot (\cos \theta_{ik} + j \sin \theta_{ik}), \end{aligned}$$

каде што $\theta_{ik} = \theta_i - \theta_k$.

Аглови карактеристики на моќност

Реален и имагинарен дел од \underline{S}_i

$$P_i = E_i \sum_{k=1}^{N_g} E_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}),$$

$$Q_i = E_i \sum_{k=1}^{N_g} E_k (G_{ik} \sin \theta_{ik} - B_{ik} \cos \theta_{ik}).$$

Моќностите се изразени преку ефективните вредности на електромоторни сили на синхроните генератори и преку нивните агли на изместување, поради што и се нарекуваат *аглови карактеристики на моќност*.

Пример 5.2

За системот од примерот 5.1 да се напишат агловите карактеристики за активна моќност.

$$P_1 = 0,1340 \cdot E_1^2 + 0,1305 \cdot E_1 E_2 \cos \theta_{56} + 0,2267 \cdot E_1 E_2 \sin \theta_{56},$$

$$P_2 = 0,1295 \cdot E_2^2 + 0,1305 \cdot E_1 E_2 \cos \theta_{65} + 0,2267 \cdot E_1 E_2 \sin \theta_{65} \\ = 0,1295 \cdot E_2^2 + 0,1305 \cdot E_1 E_2 \cos \theta_{56} - 0,2267 \cdot E_1 E_2 \sin \theta_{56},$$

$$P_1 = 0,1340 \cdot E_1^2 + 0,1305 \cdot E_1 E_2 (\cos \theta_5 \cos \theta_6 + \sin \theta_5 \sin \theta_6) \\ + 0,2267 \cdot E_1 E_2 (\sin \theta_5 \cos \theta_6 - \cos \theta_5 \sin \theta_6),$$

$$P_2 = 0,1295 \cdot E_2^2 + 0,1305 \cdot E_1 E_2 (\cos \theta_5 \cos \theta_6 + \sin \theta_5 \sin \theta_6) \\ + 0,2267 \cdot E_1 E_2 (\cos \theta_5 \sin \theta_6 - \sin \theta_6 \cos \theta_6),$$

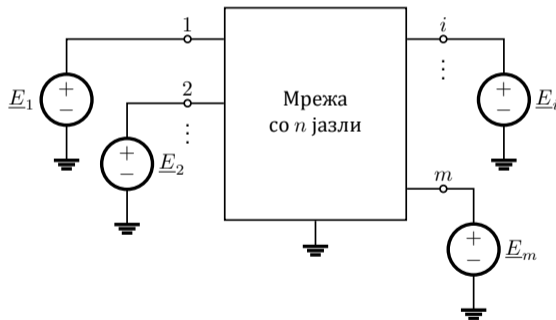
Изразите не се воопшто едноставни и за поголем број генератори е бесмислено да ги пишуваме во аналитичка форма.

При нумеричките анализи на стабилноста на работата на ЕЕС се користи изразот

$$\underline{\mathbf{S}} = \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot (\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{E}})^*$$

Кронова редукција на матрицата на адмитанции

- Потрошувачите се претставени со импеданции и се дел од мрежата
- Импеданциите на генераторите се дел од мрежата
- Единствени активни елементи во мрежата се напонските генератори со кои се претставени електромоторните сили на генераторите



Во мрежата имаме m јазли во кои се поврзани напонските генератори и n пасивни јазли во кои се поврзани сите останати елементи од мрежата.

Кронова редукција на матрицата на адмитанции

Јазлите во колото ќе ги поделиме во 2 множества

$$a \in \{1, 2, \dots, m\} \quad \text{и} \quad b \in \{m + 1, m + 2, \dots, m + n\},$$

Системот равенки напишан според методот на независни напони

$$\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}}$$

можеме да го поделиме на два блока

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{Y}}_{aa} & \underline{\mathbf{Y}}_{ab} \\ \hline \underline{\mathbf{Y}}_{ba} & \underline{\mathbf{Y}}_{bb} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \underline{\mathbf{U}}_a \\ \underline{\mathbf{U}}_b \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \underline{\mathbf{I}}_a \\ \underline{\mathbf{I}}_b \end{array} \right],$$

$$\underline{\mathbf{Y}}_{aa} \cdot \underline{\mathbf{U}}_a + \underline{\mathbf{Y}}_{ab} \cdot \underline{\mathbf{U}}_b = \underline{\mathbf{I}}_a,$$

$$\underline{\mathbf{Y}}_{ba} \cdot \underline{\mathbf{U}}_a + \underline{\mathbf{Y}}_{bb} \cdot \underline{\mathbf{U}}_b = \underline{\mathbf{I}}_b,$$

Кронова редукција на матрицата на адмитанции

Во множеството b има само пасивни така што е $\underline{\mathbf{I}}_b = 0$

$$\underline{\mathbf{U}}_b = -\underline{\mathbf{Y}}_{bb}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{ba} \cdot \underline{\mathbf{U}}_a.$$

Со замена на $\underline{\mathbf{U}}_b$ добиваме равенка во која фигурираат само напоните и инјектираните струи во јазлите од множеството a

$$\underline{\mathbf{Y}}_{aa} \cdot \underline{\mathbf{U}}_a - \underline{\mathbf{Y}}_{ab} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{bb}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{ba} \cdot \underline{\mathbf{U}}_a = \underline{\mathbf{I}}_a,$$

која во компактна форма го има следниот облик

$$\underline{\mathbf{Y}}_a \cdot \underline{\mathbf{U}}_a = \underline{\mathbf{I}}_a,$$

каде што $\underline{\mathbf{Y}}_a$ е редуцираната матрица на адмитанции која се однесува само на генераторските јазли

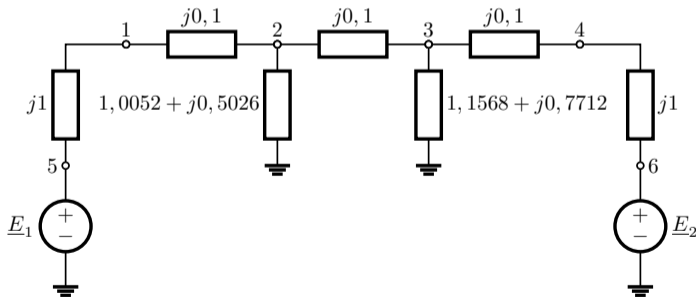
$$\underline{\mathbf{Y}}_a = \underline{\mathbf{Y}}_{aa} - \underline{\mathbf{Y}}_{ab} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{bb}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Y}}_{ba}.$$

Пример 5.3

Со примена на Кроновата редукција за системот од примерот 5.1 да се одреди редуцираната матрица на адмитанции за генераторските јазли за следните случаи:

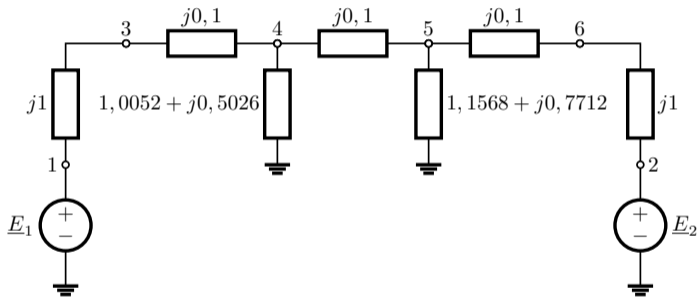
- нормална работна состојба,
- трифазна куса врска кај јазелот 2.

Да се пресметаат инјектираните моќности на генераторите за двата наведени случаја.



Пример 5.3

Повторна нумерација на јазлите, така што генераторските јазли ќе добијат индекси 1 и 2, додека за останатите пасивни јазли редоследот може да биде произволен



Пример 5.3

Матрицата на адмитанции која одговара на новата нумерација се добива од претходната со пермутација на редиците и колоните по следниот редослед: 5, 6, 1, 2, 3, 4

$$\underline{\mathbf{Y}} = \left[\begin{array}{cc|cc} -j1 & 0 & j1 & 0 \\ 0 & -j1 & 0 & 0 \\ \hline j1 & 0 & -j11 & j10 \\ 0 & 0 & j10 & 0,7958 - j20,3979 \\ 0 & 0 & 0 & j10 \\ 0 & j1 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & j1 \\ 0 & 0 \\ j10 & 0 \\ 0,5985 - j20,3990 & j10 \\ j10 & -j11 \end{array} \right] \cdot$$

Пример 5.3

programi/stab/yg_primer_1.m

```
1 addpath(' ../naponi '); % presmetka na naponi
2 ees = ees_5;
3 [Um, Ua] = naponi(ees);
4 U = Um/110 .* exp(1j*Ua/180*pi)
5
6 Y0 = matrica_y(ees.granki); % matrica na admitancii
7 Sinj = U.*conj(Y0*U) % injektirani moknosti vo jazlite
8
9 g = ees.gen(:,1); Xg = ees.gen(:,2); % EMS na generatorite
10 E = U(g) + 1j*Xg .* conj(Sinj(g)./U(g))
11
12 granki = [ % prosirena matrica na admitancii
13           ees.granki
14           g [5; 6] [0; 0] Xg [0; 0]
15 ];
16 Y = matrica_y(granki);
17
18 p = [2 3];
19 Sp = (ees.jazli(p,3) + 1j*ees.jazli(p,4))/ees.Sb;
20 Yp = conj(Sp)./abs(U(p)).^2; % admitancii na potrosuvacite
21 Y = Y + sparse(p, p, Yp, 6, 6); % dodavanje vo matricata Y
```

Пример 5.3

```
22
23 i = [5 6 1 2 3 4]; % nov redosled na jazlite
24 Y = Y(i,i); % permutacija na Y (prvi se generatorskite jazli)
25 Yaa = Y(1:2, 1:2); % podmatrici od matricata Y
26 Yab = Y(1:2, 3:6);
27 Ybb = Y(3:6, 3:6);
28 Yg = Yaa - Yab*Ybb^-1*Yab.' % matrica na admitancii za gen. jazli
29 Sg = E.*conj(Yg*E) % proverka na injektiranite moknosti
30 dQ = Xg .* abs(Sinj(g)./U(g)).^2 % reaktivna moknost na Xg
31
32 Y(4,4) = 1e6; % kusa vrska kaj jazlot 2
33 Yaa = Y(1:2, 1:2);
34 Yab = Y(1:2, 3:6);
35 Ybb = Y(3:6, 3:6);
36 Yg = Yaa - Yab*Ybb^-1*Yab.' % matrica na admitancii za gen. jazli
37 Sg = E.*conj(Yg*E) % injektirani moknosti na generatorite
```

Претходната програма ја пишуваме во форма на функција која го има следното заглавие

programi/stab/matrica_yg.m

```
1 function [Yg, E] = matrica_yg(datoteka)
```

Пример 5.3

```
>> [Yg, E] = matrica_yg('ees_5')
Yg =
(1,1)      0.1340 - 0.6450i
(2,1)      0.1305 + 0.2267i
(1,2)      0.1305 + 0.2267i
(2,2)      0.1295 - 0.6424i
E =
1.5110 + 0.2368i
1.5329 + 0.9565i
```

Во вториот случај, кога имаме куса врска кај јазелот 2, во структурата ees додаваме матрица kv со една редица во која се содржани индексот на јазелот со куса врска и импеданцијата на куса врска \underline{Z}_k . Во дадениот случај имаме трифазна куса врска во јазелот 2 со импеданција $\underline{Z}_k = 10^{-6}$ pu.

programi/stab/ees_5_kv.m

```
22 ees.kv = [  
23     2 1e-6  
24 ];
```

Пример 5.3

Решението за вториот случај е следното

```
>> [Yg, E] = matrica_yg('ees_5_kv')
```

```
Yg =
```

```
(1,1)      0.0000 - 0.9091i
```

```
(2,1)      0.0000 - 0.0000i
```

```
(1,2)      0.0000 - 0.0000i
```

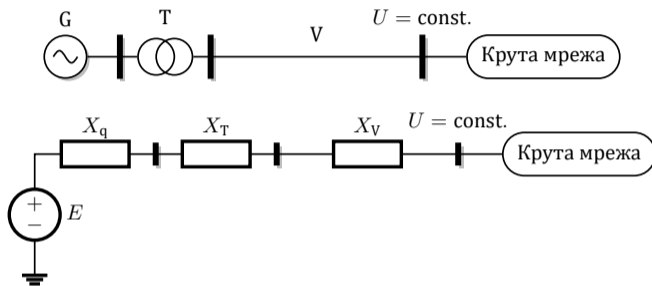
```
(2,2)      0.0039 - 0.8362i
```

```
E =
```

```
1.5110 + 0.2368i
```

```
1.5329 + 0.9565i
```

Статичка стабилност на ЕЕС



$$P = P_M \cdot \sin \theta = \frac{E \cdot U}{X_\Sigma} \cdot \sin \theta,$$

$$X_\Sigma = X_q + X_T + X_V.$$

Статичка стабилност на ЕЕС

Рамнотежна состојба

$$P_m = P_0 = P_M \cdot \sin \theta_0$$

генераторот работи точката A или B

Нарушување на рамнотежата

$$\theta = \theta_0 + \Delta\theta$$

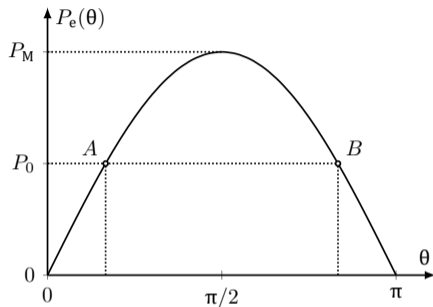
$$P_m = P_0 = P_M \cdot \sin \theta_0 \quad P_e = P_M \cdot \sin(\theta_0 + \Delta\theta).$$

$$\Delta P = P_m - P_e = P_M \cdot \sin(\theta_0) - P_M \cdot \sin(\theta_0 + \Delta\theta).$$

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin(\theta_0) \cdot \cos \Delta\theta + \cos(\theta_0) \cdot \sin \Delta\theta,$$

за мали вредности на $\Delta\theta$ важи $\cos \Delta\theta \approx 1$ и $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0) \cdot \Delta\theta$$



Статичка стабилност на ЕЕС

$$\begin{aligned}\Delta P &= P_M \cdot \sin(\theta_0) - P_M \cdot \sin(\theta_0) - P_M \cdot \cos(\theta_0) \cdot \Delta\theta \\ &= -P_M \cdot \cos(\theta_0) \cdot \Delta\theta,\end{aligned}$$

$$\Delta P = -\left. \frac{dP}{d\theta} \right|_0 \cdot \Delta\theta = -P_s \cdot \Delta\theta,$$

P_s е синхронизациона моќност

$$P_s = \left. \frac{dP}{d\theta} \right|_0 = P_M \cdot \cos(\theta_0).$$

Преодниот електромеханички процес е опишан со следната диференцијална равенка

$$M \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = P_m - P_e = -P_s \cdot \Delta\theta, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{P_s}{M} \cdot \Delta\theta = 0.$$

Статичка стабилност на ЕЕС

Бидејќи θ_0 не е променлива

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2(\theta_0 + \Delta\theta)}{dt^2} = \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2},$$

диференцијалната равенка е

$$\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + \frac{P_s}{M} \cdot \Delta\theta = 0.$$

Општо решение

$$\Delta\theta(t) = K_1 \cdot e^{r_1 t} + K_2 \cdot e^{r_2 t},$$

r_1 и r_2 се корени на карактеристичната равенка

$$r^2 + P_s/M = 0,$$

$$r_1 = \sqrt{-P_s/M}, \quad r_2 = -\sqrt{-P_s/M}.$$

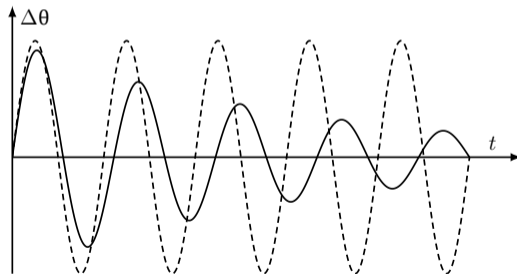
Статичка стабилност на ЕЕС

Случај кога е $P_s = dP/d\theta > 0$ (работна точка A)

$$r_{1,2} = \pm j\omega_n,$$

$$\omega_n = \sqrt{P_s/M} = \sqrt{P_M \cdot \cos \theta_0 / M},$$

$$\Delta\theta(t) = K_1 \cdot e^{j\omega_n t} + K_2 \cdot e^{-j\omega_n t} = K \cdot \sin(\omega_n t + \phi).$$

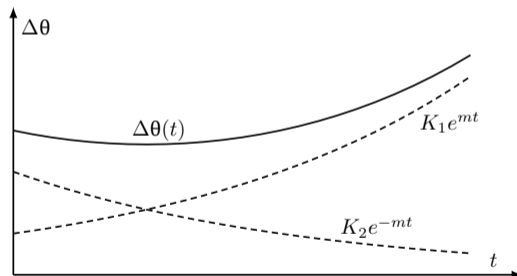


Статичка стабилност на ЕЕС

Случај кога е $P_s = dP/d\theta < 0$ (работна точка B)

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{P_s/M} = \pm m,$$

$$\Delta\theta(t) = K_1 \cdot e^{mt} + K_2 \cdot e^{-mt}.$$



Статичка стабилност на ЕЕС

Услов за статичка стабилност: моќноста на синхронизација да биде позитивна

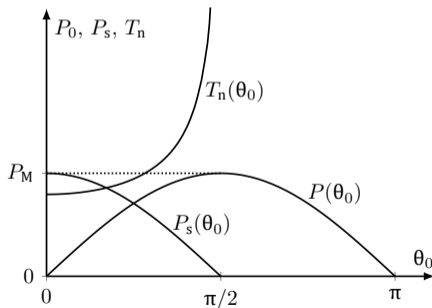
$$P_s(\theta_0) = -\left. \frac{dP}{d\theta} \right|_0 > 0,$$

$$-90^\circ < \theta_0 < 90^\circ.$$

Период и фреквенција на
електромеханичките осцилации

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{P_M \cdot \cos \theta_0 / M}} = \frac{2\pi}{\sqrt{P_s / M}},$$

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\sqrt{P_M \cdot \cos \theta_0 / M}}{2\pi} = \frac{\sqrt{P_s / M}}{2\pi}.$$



Метод на мали осцилации

Линеаризација на диференцијалните равенки

$$M_i \cdot \frac{d^2\theta_i}{dt^2} = \Delta P_i \approx - \sum_{j=1}^{N_g} \left. \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right|_0 \cdot \Delta \theta_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\theta_i = \theta_{i0} + \Delta \theta_i \quad \Rightarrow \quad d^2\theta_i/dt^2 = d^2\Delta\theta_i$$

$$\Delta\theta'' = \mathbf{A} \cdot \Delta\theta,$$

$$A_{ij} = \frac{1}{M_i} \cdot \left. \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right|_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Бидејќи системот дифренцијални равенки е од втор ред ќе воведеме дополнителни променливи за да го претвориме во систем равенки од прв ред

$$\Delta\theta' = \Delta\theta',$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta'' \\ \Delta\theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\theta' \\ \Delta\theta \end{bmatrix},$$

Метод на мали осцилации

Ја воведуваме променливата \mathbf{u}

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta\theta' \\ \Delta\theta \end{bmatrix},$$

Нов систем равенки од прв ред

$$\mathbf{u}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbf{A} \\ \mathbb{E} & \mathbb{O} \end{bmatrix}.$$

Со \mathbb{O} е означена матрица со димензии $n \times n$ со сите елементи еднакви на нула, додека \mathbb{E} е единична матрица со димензии $n \times n$.

Релација за инјектирани моќности во јазлите

$$\underline{\mathbf{S}} = \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{I}}^* = \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot (\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{E}})^*,$$

Парцијални изводи на инјектираните моќности по фазните агли

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial \theta} = \text{diag}(\underline{\mathbf{I}}^*) \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial \theta} + \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{I}}^*}{\partial \theta}.$$

Метод на мали осцилации

Имајќи предвид дека е $\underline{E}_i = E_i \cdot e^{j\theta_i}$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial \theta} = j \cdot \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}),$$

Користејќи $\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{I}}$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{I}}}{\partial \theta} = j \cdot \underline{\mathbf{Y}} \cdot \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial \theta} &= \text{diag}(\underline{\mathbf{I}}^*) \cdot j \cdot \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) + \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot [j \cdot \underline{\mathbf{Y}} \cdot \text{diag}(\underline{\mathbf{E}})]^* = \\ &= j \cdot \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot (\text{diag}(\underline{\mathbf{I}}) - \underline{\mathbf{Y}} \cdot \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}))^* = \\ &= j \cdot (\text{diag}(\underline{\mathbf{S}}) - \text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot \underline{\mathbf{Y}}^* \cdot \text{diag}(\underline{\mathbf{E}})^*). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} = \text{Re} \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{S}}}{\partial \theta} \right),$$

Метод на мали осцилации

Коефициентите M_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) ги сместуваме во вектор \mathbf{M}

$$\mathbf{A} = [\text{diag}(\mathbf{M})]^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

Решенија на системот диференцијални равенки

$$\Delta \theta_i(t) = \sum_{j=1}^{2n} C_{ij} \cdot e^{\lambda_j t}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

каде што λ_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$) се сопствени вредности на матрицата \mathbf{B} , т. е. корени на карактеристичната равенка

$$\det \mathbf{T} = \det \begin{bmatrix} -\lambda \mathbf{E} & \mathbf{A} \\ \mathbf{E} & -\lambda \mathbf{E} \end{bmatrix} = 0,$$

Метод на мали осцилации

Матрица претставена со блокови од матрици

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{T} = \det \mathbf{T}_4 \cdot \det (\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_4^{-1} \mathbf{T}_3).$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{T} &= \det (-\lambda \mathbb{E}) \cdot \det \left[-\lambda \mathbb{E} - \mathbf{A} (-\lambda \mathbb{E})^{-1} \mathbb{E} \right] \\ &= (-\lambda)^n \cdot \det [-\lambda \mathbb{E} - (-1/\lambda) \mathbf{A}] \\ &= \det [\lambda^2 \mathbb{E} - \mathbf{A}], \end{aligned}$$

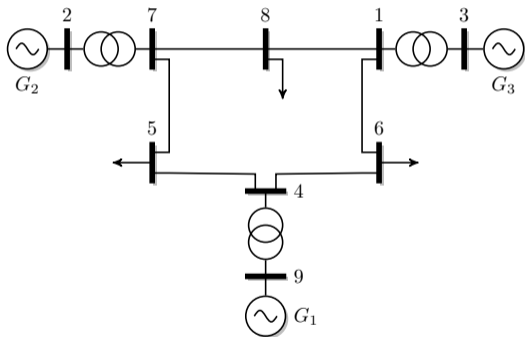
$$\det \mathbf{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det (\mathbf{A} - \lambda^2 \mathbb{E}) = 0.$$

Метод на мали осцилации

- Доколку ги пресметаме сопствените вредности на матрицата \mathbf{A} , тогаш ќе ги добиеме вредностите за λ_i^2 ($i = 1, 2, \dots, n$)
- Со пресметување на квадратен корен ќе добиеме по 2 вредности за секоја од нив $\pm \sqrt{\lambda_i^2}$ (сопствените вредности на матрицата \mathbf{B})
- Ако решенијата за $\Delta\theta_i(t)$ се придушени сложенопериодични или чисто хармониски функции од времето t , тогаш тоа ќе значи дека системот во дадениот режим е статички стабилен
- За системот да биде статички стабилен неопходно е сопствените вредности на матрицата \mathbf{B} да бидат чисто имагинарни броеви, што значи дека сите сопствени вредности на матрицата \mathbf{A} мораат да бидат реални негативни броеви

Пример 5.4

За системот прикажан на сликата да се определат сопствените фреквенции на осцилирање на аглите на генераторите и да се провери дали тој е статички стабилен.



гранка	R (pu)	X (pu)	B (pu)
2-7	0	0,0625	0
7-8	0,0085	0,072	0,149
3-1	0	0,0586	0
1-8	0,0119	0,1008	0,209
7-5	0,032	0,161	0,306
5-4	0,01	0,085	0,176
1-6	0,039	0,17	0,358
6-4	0,017	0,092	0,158
9-4	0	0,0576	0

Пример 5.4

потрошувач	5	6	8
P (MW)	125	90	100
Q (Mvar)	50	30	35

генератор	1	2	3
S_n (MVA)	247,5	192	128
X (pu)	0,0608	0,1198	0,1813
T_j (s)	19,1	6,67	4,7
P (MW)	балансен	163	85
U (pu)	1,04	1,025	1,025

programi/stab/ees_9_jazli.m

```
1 function ees = ees_9_jazli()
2 ees.Sb = 100;
3 ees.Us = 1.04;
4 ees.jazli = [
5     1    220     0     0
6     2     18    163     0
7     3    13.8     85     0
8     4    220     0     0
9     5    220   -125   -50
10    6    220    -90   -30
11    7    220     0     0
```

Пример 5.4

```
12     8   220  -100 -35
13     9  16.5    0   0
14 ];
15 ees.granki = [
16     2   7   0           0.0625  0
17     7   8  0.0085  0.072  0.149
18     3   1   0           0.0586  0
19     1   8  0.0119  0.1008  0.209
20     7   5  0.032   0.161  0.306
21     5   4  0.01    0.085  0.176
22     1   6  0.039   0.17   0.358
23     6   4  0.017   0.092  0.158
24     9   4   0           0.0576  0
25 ];
26 ees.pv = [
27     2  1.025
28     3  1.025
29 ];
30 ees.gen = [
31     9  0.0608  247.5*19.10/(100*pi)  0
32     2  0.1198  192.0*6.67/(100*pi)   0
33     3  0.1813  128.0*4.70/(100*pi)   0
34 ];
```

Пример 5.4

programi/stab/stat_stab.m

```
1 ees = ees_9_jazli;
2 [Y, E] = matrica_yg(ees);
3
4 S = diag(E)*conj(Y*E);
5 dS = 1j*(diag(S) - diag(E)*conj(Y*diag(E)));
6
7 M = ees.gen(:,3)/ees.Sb;
8 A = -diag(M)^-1*real(dS);
9 B = [
10     zeros(3) A
11     eye(3)   zeros(3)
12 ];
13
14 L1 = eig(A)
15 L2 = eig(B)
```

Пример 5.4

```
>> stat_stab
L1 =
  -0.0000
 -62.9146
-148.8138
L2 =
  0.0000 + 0.0000i
 -0.0000 + 0.0000i
  0.0000 + 7.9319i
  0.0000 - 7.9319i
  0.0000 +12.1989i
  0.0000 -12.1989i
```

Очигледно е дека сопствените вредности на матрицата **B** се еднакви на квадратниот корен од сопствените вредности на матрицата **A**

$$\sqrt{-62,9146} = \pm j7,9139; \quad \sqrt{-148,8138} = \pm j12,1989.$$

Фреквенции на осцилирање на фазните агли

$$f_1 = \frac{7,9319}{2\pi} = 1,26 \text{ Hz}, \quad f_2 = \frac{12,1989}{2\pi} = 1,94 \text{ Hz}.$$

Пример 5.5

Во системот од примерот 5.4 потрошувачот во јазелот 8 одеднаш ја зголемува својата моќност за 10 MW што е околу 3% од вкупната моќност која изнесува 315 MW. Според тоа, можеме да сметаме дека настанала мала промена во системот и врз основа на тоа да ја испитаме неговата статичка стабилност. Со решавање на системот диференцијални равенки да се определи временскиот тек на промената на фазните агли на генераторите во период од 2,5 s и да се проценат фреквенциите на осцилациите кои ќе се јават во системот.

Равенка на движење на синхрон агрегат

$$M \frac{d\omega}{dt} + K_p \frac{d\theta}{dt} = P_m - P_e(\theta), \quad M = \frac{S_n T_j}{\omega_0},$$

Ја воведуваме променливата

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0,$$
$$\frac{d(\Delta\omega)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Пример 5.5

Промена на аглите во однос на нивните почетни вредности

$$\theta = \theta_0 + \Delta\omega \cdot t, \quad \frac{d\theta}{dt} = \Delta\omega.$$

За секој синхрон агрегат имаме 2 диференцијални равенки од прв ред

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \Delta\omega, \\ \frac{d(\Delta\omega)}{dt} &= \frac{P_m - P_e(\theta)}{M} - \frac{K_p}{M} \Delta\omega, \end{aligned}$$

Електрична моќност на генераторите

$$\mathbf{P} = \text{Re} [\text{diag}(\underline{\mathbf{E}}) \cdot (\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{E}})^*],$$

Електромоторна сила

$$\underline{E}_i = E_i \cdot e^{j\theta_i},$$

Пример 5.5

programi/stab/stabilnost_model.m

```
1 function dy = stabilnost_model(t,y,Pm,M,Kp,E,Y)
2 if size(y,1) == 1, y = y'; end
3 n = size(Pm,1); % broj na generatori
4 teta = y(1:n); % presmetka na kompleksen pretstavnik na E
5 E = (E .* exp(1j*teta));
6 Pe = real(E .* conj(Y * E)); % presmetka na Pe
7 dy = [% presmetka na izvodite (y = [teta; delta_omega])
8       y(n+1:2*n); % d(teta)/dt = delta_omega
9       % d(delta_omega)/dt = (Pm - Pe)/M - Kp/M*delta_omega
10      (Pm - Pe)./M - Kp./M.*y(n+1:2*n);
11     ];
```

Пример 5.5

programi/stab/stabilnost.m

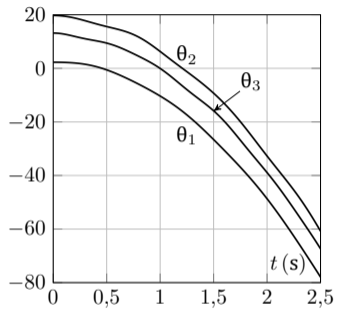
```
1 function [t, teta, delta_omega] = stabilnost(datoteka,t_kraj,n_tocki)
2 addpath(' ../dif_rav');
3 if isstruct(datoteka)
4     ees = datoteka;
5 else
6     ees = feval(datoteka);
7 end
8 n = length(ees.Pm);
9 y0 = ees.y0;
10 M = ees.gen(:,3)/ees.Sb;
11 Kp = ees.gen(:,4)/ees.Sb;
12 dy = @(t,y) stabilnost_model(t,y,ees.Pm,M,Kp,ees.E,ees.Y);
13 [t, y] = rk4(dy,0,t_kraj,y0,n_tocki);
14 teta = y(:,1:n);
15 delta_omega = y(:,n+1:2*n);
```

Пример 5.5

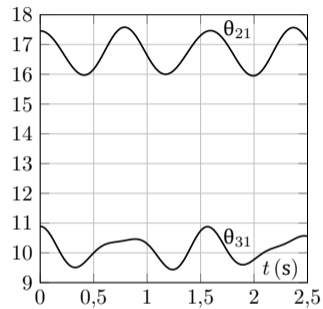
programi/stab/ees_9_osc.m

```
1 ees = ees_9_jazli; % pocetna sestojba na sistemot
2 [Y, E] = matrica_yg(ees);
3 ees.E = abs(E); % EMS na generatorite
4 ees.teta = angle(E); % fazni agli
5 ees.Pm = real(E.*conj(Y*E)); % mehanicka moknost
6
7 ees.dp = [ % promena na moknost na potrosuvac
8           8 10 % jazel MW
9         ];
10 [Y, E] = matrica_yg(ees);
11 ees.Y = Y;
12
13 % resavanje na sistem od diferencijalni ravenki
14 ees.y0 = [ees.teta; zeros(3,1)];
15 [t, teta, delta_omega] = stabilnost(ees,2.5,100);
16 teta = teta/pi*180;
17 f = 50 + delta_omega/(2*pi);
18 close all
19 figure; plot(t,teta); xlabel('t [s]'); ylabel('teta [o]'); grid;
20 figure; plot(t,teta(:,2:3)-teta(:,1)); xlabel('t [s]'); ylabel('teta-teta_1 [o]'); grid;
```

Пример 5.5



a)



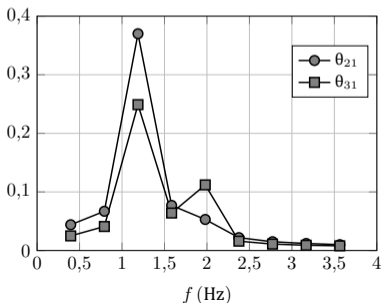
б)

Пример 5.5

Фреквенцијата на осцилациите ја определуваме со примена на Фуриева трансформација

programi/stab/ees_9_fft.m

```
1 ees_9_osc
2 y = teta(:,2:3) - teta(:,1);
3 y = abs(fft(y)); n = length(y);
4 Fs = 1/(t(2)-t(1));
5 f = (0:1:n-1)*Fs/n;
6 figure; plot(f(2:10), y(2:10,:)/n, '-o'); grid;
```



На сликата се забележливи максимуми на фреквенции од околу 1, 2 Hz и 2 Hz колку што приближно изнесуваа и сопствените фреквенции од примерот 5.4.

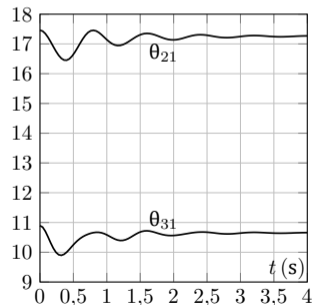
Пример 5.5

Асинхрон придушен момент

$$K_P = \frac{P_s}{s/100 \cdot \omega_0},$$

Ќе претпоставиме дека при лизгање $s = 6\%$ синхронизационата моќност е еднаква на номиналната моќност на генераторот.

```
ees.gen(:,4) = [  
    247.5/(0.06*100*pi)  
    192.0/(0.06*100*pi)  
    128.0/(0.06*100*pi)  
];
```

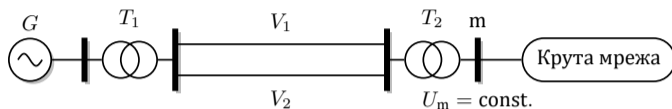


Динамичка стабилност на ЕЕС

Анализи на преодните електромеханички процеси до кои доаѓа при големи пореметувања

- наглите вклучувања или исклучувања на големи потрошувачи,
- промените во конфигурацијата на мрежата, т. е. вклучувања или исклучувања на поважни водови или трансформатори,
- наглите испади на големи генераторски единици,
- сите видови на куси врски во ЕЕС.

Генератор поврзан на крута мрежа



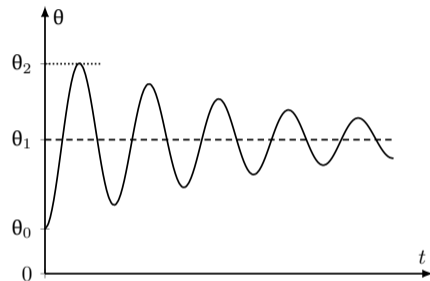
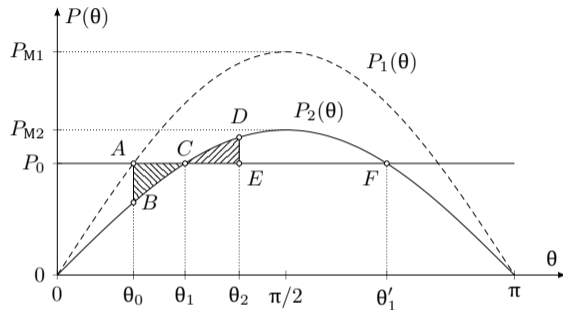
$$P_1(\theta) = P_{M1} \cdot \sin \theta = \frac{E' \cdot U_m}{X_{\Sigma 1}} \cdot \sin \theta \quad X_{\Sigma 1} = X'_d + X_{T1} + X_{V1} \parallel X_{V2} + X_{T2}$$

Нагло исклучување на водот V_1

$$P_2(\theta) = P_{M2} \cdot \sin \theta = \frac{E' \cdot U_m}{X_{\Sigma 2}} \cdot \sin \theta \quad X_{\Sigma 2} = X'_d + X_{T1} + X_{V2} + X_{T2}$$

Притоа важи $P_{M2} < P_{M1}$, поради тоа што е $X_{\Sigma 2} > X_{\Sigma 1}$.

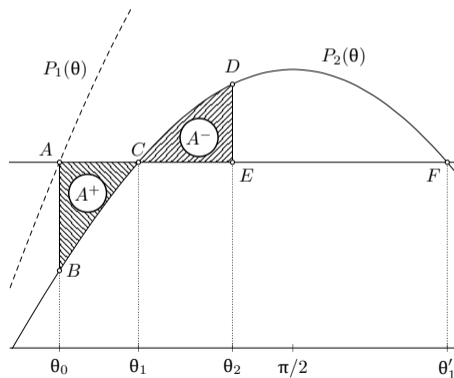
Генератор поврзан на крута мрежа



Правило на еднакви површини

Период на забрзување $\theta_0 < \theta < \theta_1$, $\Delta P > 0$, се зголемува брзината и кинетичката енергија

$$\Delta W_k = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Delta M(\theta) \cdot d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\Delta P(\theta)}{\omega} \cdot d\theta.$$



Правило на еднакви површини

Бидејќи $\omega \approx \omega_0$

$$\Delta W_k \approx \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\Delta P(\theta)}{\omega_0} \cdot d\theta = \frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Delta P(\theta) \cdot d\theta.$$

Период на успорување $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\Delta P < 0$, се намалува брзината и кинетичката енергија

Во моментот кога ќе се достигне максималниот агол θ_2 , брзина ќе биде $\omega = \omega_0$

Сета кинетичка енергија што роторот ја акумулирал во периодот на забрзување тој ја вратил во периодот на успорување

$$\int_{\theta_0}^{\theta_2} \Delta M(\theta) \cdot d\theta \approx \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_{\theta_0}^{\theta_2} \Delta P(\theta) \cdot d\theta = 0$$

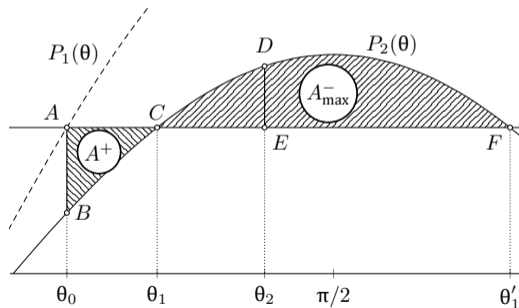
$$\frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Delta P(\theta) \cdot d\theta + \frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta P(\theta) \cdot d\theta = 0$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \Delta P(\theta) \cdot d\theta = f_{\triangleleft ABC} = A^+, \quad - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta P(\theta) \cdot d\theta = f_{\triangleleft CDE} = A^-,$$

Правило на еднакви површини

$$A^+ = A^-.$$

- Величината A^+ претставува површина опфатена со правата $P = P_0$ и кривата $P = P_2(\theta)$ во интервалот на забрзување (θ_0, θ_1) . Се нарекува површина на забрзување.
- Аналогно на неа, величината A^- ја нарекуваме површина на успорување.

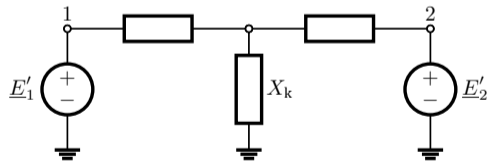
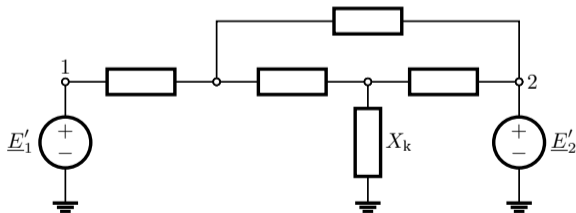
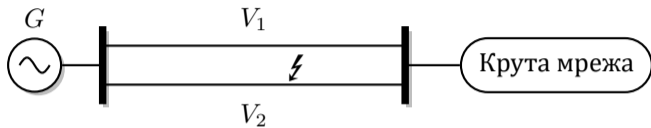


За да биде системот динамички стабилен

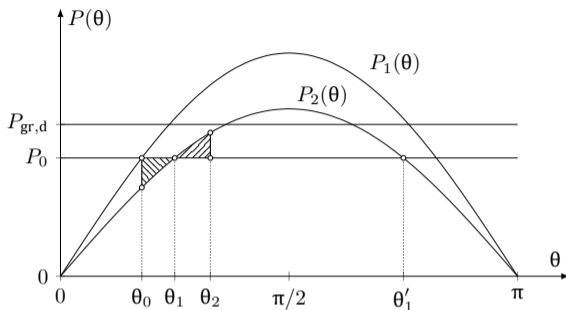
$$A_{\max}^- > A^+$$

Максимална површина за кочење

Трајна куса врска на вод



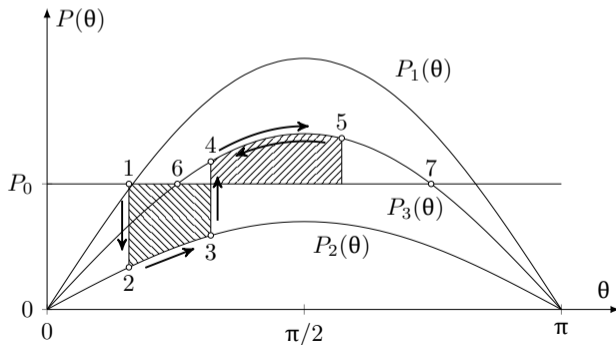
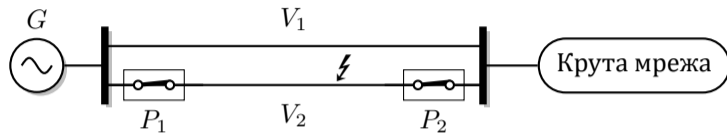
Трајна куса врска на вод



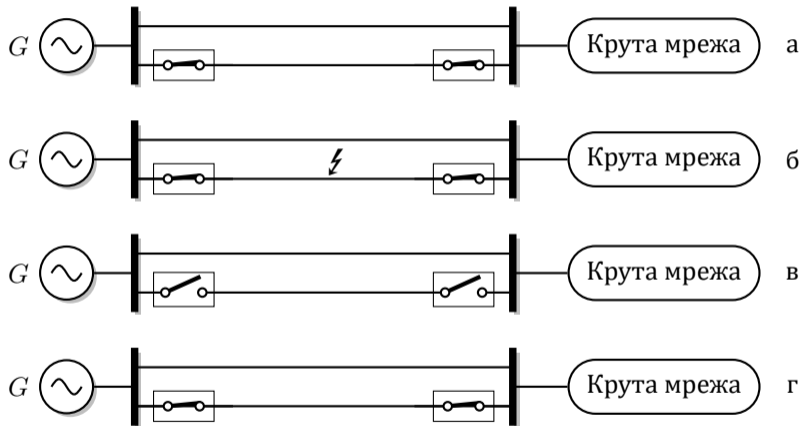
Со помош на правилото на еднакви површини можеме да ја одредиме граничната динамичка моќност $P_{gr,d}$ што генераторот може да ја оддава во претходниот режим, а по кусата врска сè уште да биде динамички стабилен.

Во тој случај без истражување на преодниот процес ќе знаеме дали во една конкретна ситуација системот ќе биде динамички стабилен (ако е $P_0 \leq P_{gr,d}$) или нестабилен (ако е $P_0 > P_{gr,d}$).

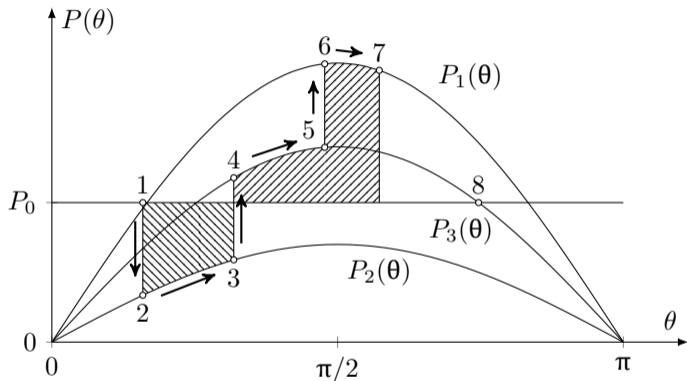
Куса врска со исклучување на повредениот вод



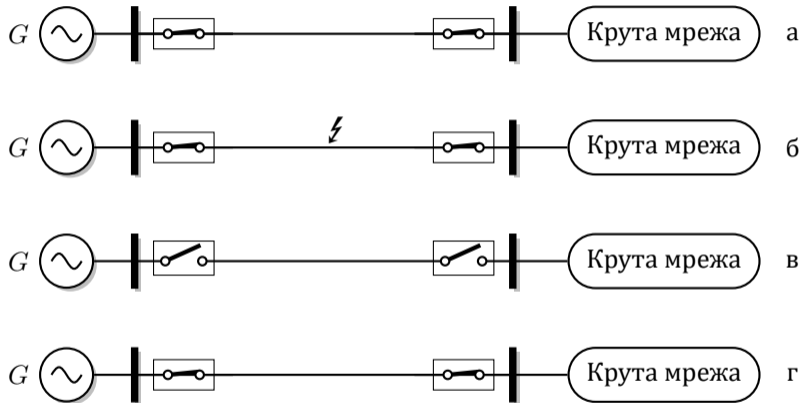
Куса врска со исклучување и автоматско повторно вклучување (АПВ)



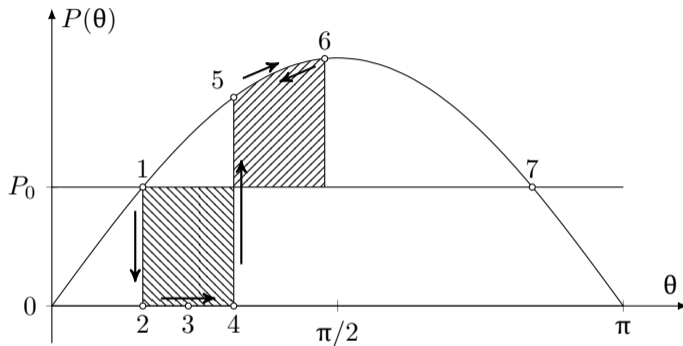
Куса врска со исклучување и автоматско повторно вклучување (АПВ)



Куси врски во преносен систем со еден вод



Куси врски во преносен систем со еден вод



Нумеричко решавање диференцијални равенки

- Во ЕЕС решенијата на диференцијалните равенки, се функции со кои што е дадена временската промена на напон, струја, агол на роторот на генератор итн.
- Егзактното решавање на диференцијалните равенки ги дава овие функции во аналитички облик со сложени изрази од независната променлива (време).
- Инженерскиот пристап кон добивањето на решението е поинаков затоа е сосема доволно да го познаваме решението дадено во нумерички облик од кој што можеме да ги извлечеме сите потребни заклучоци.
- Нумеричкото решение е дадено во вектори кои што содржат нумерички вредности на функциите кои што ги бараме за одредени вредности на независната променлива (одредени временски моменти).
- Во Matlab постојат повеќе методи за нумеричко решавање на системи диференцијани равенки од прв ред како што се `ode23`, `ode45`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`, `ode23t` и `ode23tb`.

Општ облик на равенките

Решавање на системи диференцијални равенки од прв ред од следниот облик

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}$$

Диференцијалните равенки треба да бидат така што од левата страна ќе бидат дадени првите изводи на зависните променливи y_1, y_2, \dots, y_n , додека од десната страна може да има изрази од произволен облик кој што може да ги содржи сите зависни променливи како и за независната променлива t .

Пример

Го разгледуваме следниот едноставен систем од 2 диференцијални равенки од прв ред

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= 2 \cdot y_1 - 0,001 \cdot y_1 \cdot y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -10 \cdot y_2 + 0,002 \cdot y_1 \cdot y_2,\end{aligned}$$

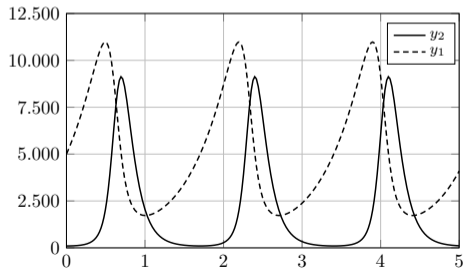
со почетни услови $y_1(0) = 5000$ и $y_2(0) = 100$. При тоа, ќе ги определиме функциите $y_1(t)$ и $y_2(t)$, како и нивните максимални вредности.

Пример

programi/dif_rav/primer_ode45.m

```
1 clc; clear
2 f = @(t,y) [2*y(1) - 0.001*y(1)*y(2); -10*y(2) + 0.002*y(1)*y(2)];
3 [t, y] = ode45(f,[0 5],[5000 100]);
4 plot(t,y);
5 ymax = max(y)
```

```
>> primer_ode45
ymax =
 1.0e+04 *
 1.0978  0.9126
```



Метод на Ојлер

Методот на Ојлер нема практична примена и тој само ќе ни послужи да го илустрираме концепот за нумеричко решавање на диференцијални равенки.

$$y' = f(t, y)$$

интервалот $[a, b]$ го делиме на n подинтервали

$$t_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

чекорот е $h = (b - a)/n$

развијање на функцијата во Тајлоров ред

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h \cdot y'(t_0) + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y''(t_0) + O(h^3).$$

ги занемариме членовите од втор и повисок ред и пишуваме $y_1 = y(t_0 + h)$ и $y_0 = y(t_0)$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0).$$

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Пример

Со методот на Ојлер ќе пробаме да ја решиме диференцијалната равенка

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

во интервалот $[0, 4]$, при што ќе користиме $n = 8$ подинтервали ($h = 0,5$). За оваа равенка го знаеме аналитичкото решение $y = e^t$.

Во овој случај имаме $y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i$, според тоа постапката за решавање на равенката е следната

$$\begin{aligned}t_0 &= 0 & y_0 &= 1 \\t_1 &= 0,5 & y_1 &= 1 + 0,5 \cdot 1 = 1,5 \\t_2 &= 1 & y_2 &= 1,5 + 0,5 \cdot 1,5 = 2,25 \\t_3 &= 1,5 & y_3 &= 2,25 + 0,5 \cdot 2,25 = 3,375 \\t_4 &= 2 & y_4 &= 3,375 + 0,5 \cdot 3,375 = 5,0625 \\t_5 &= 2,5 & y_5 &= 5,0625 + 0,5 \cdot 5,0625 = 7,59375 \\t_6 &= 3 & y_6 &= 7,59375 + 0,5 \cdot 7,59375 = 11,39062 \\t_7 &= 3,5 & y_7 &= 11,39062 + 0,5 \cdot 11,39062 = 17,08594 \\t_8 &= 4 & y_8 &= 17,08594 + 0,5 \cdot 17,08594 = 25,62891\end{aligned}$$

Пример

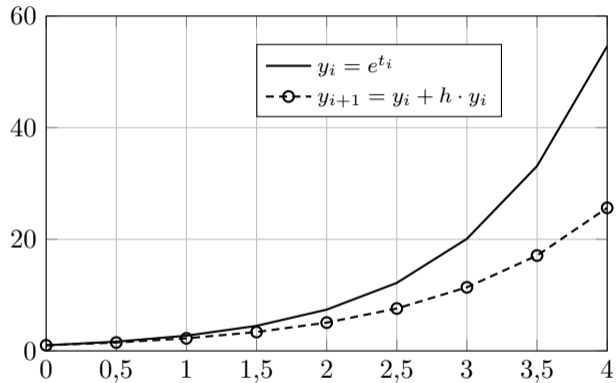
Од резултатите гледаме дека последната вредност $y_8 = 25,62891$ се разликува од точната вредност $e^4 = 54,59815$ за $-53,1\%$ што е многу голема грешка.

Ако сакаме да постигнеме поголема точност треба да го зголемиме бројот на точки. На пример за $n = 1000$ грешката кај y_8 изнесува $-0,8\%$.

programi/dif_rav/ojler_primer1.m

```
1 clc; clear;
2 y(1) = 1; t(1) = 0; n = 8; h = 4/n;
3 for i = 1:n
4     t(i+1) = t(i) + h;
5     y(i+1) = y(i) + h * y(i);
6     fprintf('%i %.1f %8.5f\n', i, t(i+1), y(i+1));
7 end
8 greska = (y(n+1)/exp(t(n+1)) - 1) * 100
9 plot(t, y, '--ko', t, exp(t), 'k');
```

Пример



Модифициран метод на Ојлер

- Првиот чекор е идентичен со чекорот кај претходно опишаниот метод на Ојлер. Со тоа се добива апроксимација за $y_{i+1}^{(1)}$.
- Во вториот чекор се пресметува нова апроксимација $y_{i+1}^{(2)}$ во која се користи средна вредност од изводот на почетокот на подинтервалот i и на апроксимираната вредност на изводот на крајот од подинтервалот добиена во првата фаза.

$$t_{i+1} = t_i + h,$$

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(t_i, y_i) + f(t_i, y_{i+1}^{(1)})}{2}.$$

Модифициран метод на Ојлер

programi/dif_rav/ojler.m

```
1 function [t, y] = ojler(f,a,b,y0,n)
2 h = (b - a) / n;
3 y(1,:) = y0;
4 t(1) = a;
5 for i = 1:n
6     t(i+1,1) = t(i) + h;
7     y1 = y(i,:) + h * f(t(i), y(i,:))';
8     y(i+1,:) = y(i,:) + h * (f(t(i), y(i,:)) + f(t(i), y1))'/2;
9 end
```

Со функцијата `ojler` можеме да ја решиме диференцијалната равенка $y' = y$ при почетен услов $y(0) = 1$ на следниот начин

programi/dif_rav/ojler_primer2.m

```
1 clc; clear;
2 f = @(t, y) y;
3 [t, y] = ojler(f,0,4,1,35);
4 greska = (y(end)/exp(t(end)) - 1) * 100
5 plot(t, y, '--ko', t, exp(t), 'k');
```

со $n = 35$ со модифицираниот метод на Ојлер се добива грешка од $-0,8\%$

Метод на Рунге-Кута

Едноставниот чекор кој се користи во секој подинтервал i според методот на Ојлер може да се употреби како „пробен“ чекор до средината на подинтервалот. Потоа, пресметаната вредност во средната точка може да се искористи за пресметка на „вистинскиот“ чекор за целиот подинтервал.

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Метод на Рунге-Кута

Постапката со „пробно“ движење низ подинтервалот во повеќе мали чекори може да продолжи и понатаму, со што се добиваат методи од класата на Рунге-Кута од повисок ред. Најпознат од тие методи е методот на Рунге-Кута од 4 ред.

$$\begin{aligned}t_{i+1} &= t_i + h, \\k_1 &= h \cdot f(t_i, y_i), \\k_2 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\k_3 &= h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\k_4 &= h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3), \\y_{i+1} &= y_i + \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6}.\end{aligned}$$

Метод на Рунге-Кута

programi/dif_rav/rk4.m

```
1 function [t, y] = rk4(f,a,b,y0,n)
2 h = (b - a) / n;
3 y(1,:) = y0;
4 t(1) = a;
5 for i = 1:n
6     k1 = h * f(t(i), y(i,:))';
7     k2 = h * f(t(i) + h/2, y(i,:) + k1/2)';
8     k3 = h * f(t(i) + h/2, y(i,:) + k2/2)';
9     k4 = h * f(t(i) + h, y(i,:) + k3)';
10    t(i+1,1) = t(i) + h;
11    y(i+1,:) = y(i,:) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
12 end
```

Метод на Рунге-Кута

Решението на диференцијалната равенка $y' = y$ при почетен услов $y(0) = 1$ можеме да го добиеме со функцијата rk4 на следниот начин

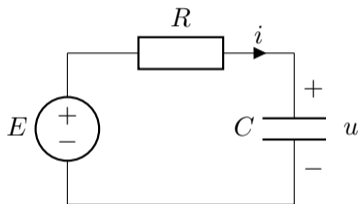
programi/dif_rav/rk4_primer1.m

```
1 clc; clear;
2 f = @(t, y) y;
3 [t, y] = rk4(f,0,4,1,8);
4 greska = (y(end)/exp(t(end)) - 1) * 100
5 plot(t, y, '--ko', t, exp(t), 'k');
```

само со 8 точки, $n = 8$, добиваме грешка од $-0,1\%$

Пример Д.1

Разгледуваме RC коло кое што е приклучено на генератор со константен напон E . Потребно е да го определиме и нацртаме временскиот тек на напонот $u(t)$ за следните бројни вредности $R = 1000 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$ и $E = 12 \text{ V}$. Кондензаторот на почетокот бил празен.



$$E = u + Ri \quad i = C \frac{du}{dt}$$

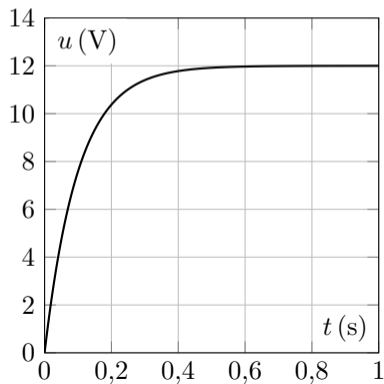
$$E = u + RC \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{E - u}{RC}$$

Пример Д.1

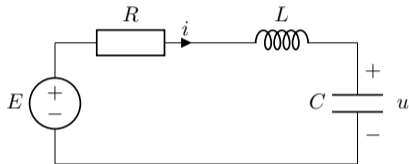
programi/dif_rav/dif_rav_primer1.m

```
1 R = 1000; C = 100e-6; E = 12;  
2 RC = @(t,y) (E - y) / (R*C);  
3 [t, y] = rk4(RC, 0, 1, 0, 200);  
4 plot(t, y);
```



Пример Д.2

Разгледуваме RLC коло коешто е приклучено на генератор со константен напон E . Потребно е да ги определиме и нацртаме временскиот тек на напонот на кондензаторот $u(t)$ и струјата во колото $i(t)$ за следните бројни вредности: $R = 7 \Omega$; $L = 0,6 \text{ H}$; $C = 100 \mu\text{F}$ и $E = 12 \text{ V}$. Кондензаторот на почетокот бил празен, а струјата во калемот била еднаква на нула.



$$E = u + Ri + L \frac{di}{dt} \quad i = C \frac{du}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u}{L}$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C}$$

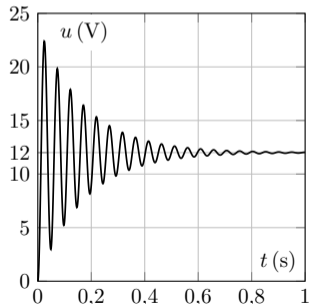
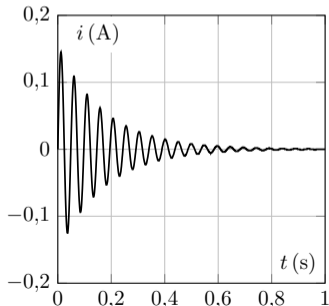
$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{E - Ry_1 - y_2}{L},$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{y_1}{C}$$
$$y_1 = i \quad \text{и} \quad y_2 = u$$

Пример Д.2

programi/dif_rav/dif_rav_primer2.m

```
1 R = 7; L = 0.6; C = 100e-6; E = 12;  
2 RLC = @(t,y) [(E - R*y(1) - y(2))/L; y(1)/C];  
3 [t, y] = rk4(RLC, 0, 1, [0 0], 1000);  
4 plot(t,y);
```

```
\begin{lstlisting}  
>> [ymax, ind_max] = max(y)  
ymax =  
    0.1446    22.3992  
ind_max =  
    13     25  
>> t(ind_max)  
ans =  
    0.0120  
    0.0240
```



Пример Д.2

Максимална брзина на менување на напонот

```
>> [ymax, ind_max] = max(y(:,1)/C)
ymax =
    1.4455e+03
ind_max =
     13
>> t(ind_max)
ans =
    0.0120
```

напонот најбрзо се менува во $t = 0,012$ s со стапка на промена од 1445,5 V/s.

Загубите на енергија во отпорникот

$$W_R = R \int_0^1 i^2(t) dt, \quad W_R = R \Delta t \sum_{k=1}^n i_k^2$$

Енергијата која што генераторот ја вложил во колото

$$W_E = E \int_0^1 i(t) dt = E \Delta t \sum_{k=1}^n i_k.$$

Пример Д.2

На крајот од преодниот процес имаме $i = 0$ и $u = E$, во калемот нема да има енергија, енергијата во кондензаторот е $W_C = CE^2/2$

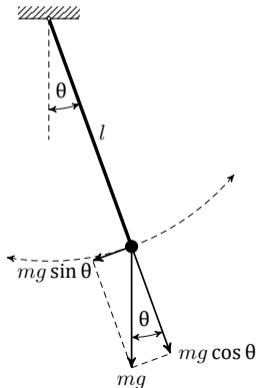
```
>> WR = R*0.001*sum(y(:,1).^2)
WR =
    0.0072
>> WE = E*0.001*sum(y(:,1))
WE =
    0.0144
>> WC = C*E^2/2
WC =
    0.0072
```

Закон за запазување на енергија $W_E = W_R + W_C$.

Генераторот вложува два пати повеќе енергија отколку што има акумулирана енергија во кондензаторот на крајот од преодниот процес.

Пример Д.3

На сликата е прикажано идеално математичко нишало каде топче со занемарливи димензии и маса m е закачено на нерастеглив конец со должина l и со занемарлива маса. Конецот секогаш е затегнат така што топчето се движи по кружна патека. Да се определи промената на аголот на нишање $\theta(t)$ за две вредности на почетниот агол $\theta_0 = 20^\circ$ и $\theta_0 = 90^\circ$. Должината на нишалото изнесува $l = 1$ м.



Пример Д.3

Втор Нютнов закон

$$\begin{aligned}F &= m \cdot a, \\ -m \cdot g \cdot \sin \theta &= m \cdot a, \\ a &= -g \cdot \sin \theta,\end{aligned}$$

Изминат пат во форма на лак со должина $s = l \cdot \theta$

$$\begin{aligned}a &= \frac{d^2 s}{dt^2} = l \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2}, \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \cdot \sin \theta.\end{aligned}$$

Дефинираме нови променливи

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{d\theta}{dt}, \\ y_2 &= \theta,\end{aligned}$$

Пример Д.3

Систем равенки од прв ред

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{g}{l} \sin y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1,\end{aligned}$$

за кој имаме $y_1(0) = 0$ и $y_2(0) = \theta_0$.

За мали вредности на аголот θ можеме да сметаме дека е $\sin \theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(g/l) \cdot \theta,$$

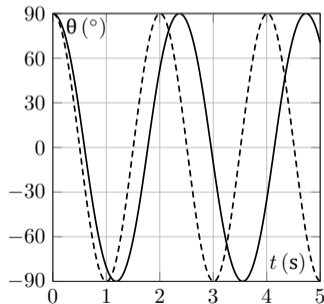
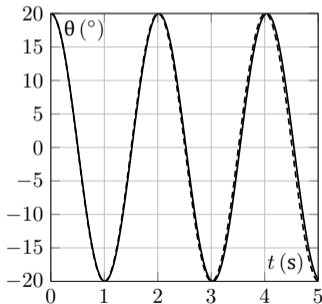
Решение

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{g/l} \cdot t \right).$$

Пример Д.3

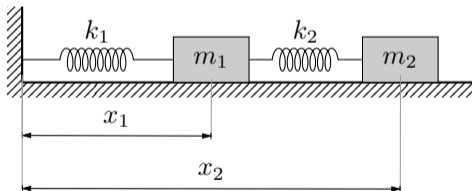
programi/dif_rav/dif_rav_primer3.m

```
1 g = 9.81; l = 1; teta_0 = 90;  
2 nisalo = @(t,y) [-g/l*sin(y(2)); y(1)];  
3 [t, y] = rk4(nisalo, 0, 5, [0 teta_0/180*pi], 200);  
4 plot(t, y(:,2)/pi*180, t, teta_0*cos(sqrt(g/l)*t));
```



Пример Д.4

Два објекта со маси $m_1 = 1$ kg и $m_2 = 1,5$ kg се споени со пружини со константи $k_1 = 8$ и $k_2 = 40$ како што е прикажано на сликата. Должините на пружините во мирување изнесуваат $l_1 = 0,5$ m и $l_2 = 1$ m. Левиот крај од првата пружина е фиксиран. Масите се лизгаат на површина со триење, при што коефициентите на триење изнесуваат $c_1 = 0,8$ и $c_2 = 0,5$. Ако масата m_2 ја повлечеме надесно и дојдеме во состојба во која почетните вредности на растојанијата x_1 и x_2 изнесуваат $x_1(0) = 0,5$ m и $x_2(0) = 2,25$ m и потоа ја пуштиме слободно, во системот ќе настане осцилаторен процес. Да се определат зависностите $x_1(t)$ и $x_2(t)$.



Пример Д.4

Силите од пружините се пропорционални со нивното издолжување, силите на триење се пропорционални со брзините.

Втор Њутнов закон

$$\begin{aligned}m_1 a_1 &= -c_1 v_1 - k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2), \\m_2 a_2 &= -c_2 v_2 - k_2(x_2 - x_1 - l_2).\end{aligned}$$

Брзините и забрзувањата ги изразуваме преку изводи од координатите

$$\begin{aligned}m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -c_1 \frac{dx_1}{dt} - k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2), \\m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -c_2 \frac{dx_2}{dt} - k_2(x_2 - x_1 - l_2).\end{aligned}$$

Воведуваме променливи

$$y_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = \frac{dx_2}{dt}, \quad y_4 = x_2,$$

Пример Д.4

Систем од четири диференцијални равенки од прв ред

$$\frac{dy_1}{dt} = [-c_1 y_1 - k_1(y_2 - l_1) + k_2(y_4 - y_2 - l_2)] / m_1,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1,$$

$$\frac{dy_3}{dt} = [-c_2 y_3 - k_2(y_4 - y_2 - l_2)] / m_2,$$

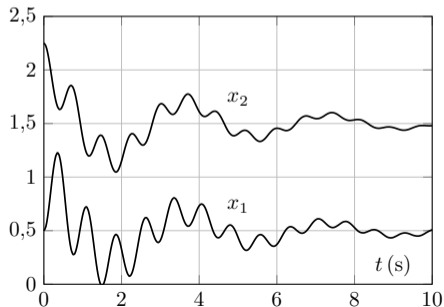
$$\frac{dy_4}{dt} = y_3,$$

со следните почетни услови: $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = 0,5$; $y_3(0) = 0$ и $y_4(0) = 2,25$.

Пример Д.4

programi/dif_rav/dif_rav_primer4.m

```
1 m1 = 1; m2 = 1.5; k1 = 8; k2 = 40; l1 = 0.5; l2 = 1;
2 c1 = 0.8; c2 = 0.5;
3 pruzini = @(t,y) [
4     (-c1*y(1) - k1*(y(2)-l1) + k2*(y(4)-y(2)-l2))/m1
5     y(1)
6     (-c2*y(3) - k2*(y(4)-y(2)-l2))/m2
7     y(3)
8 ];
9 [t, y] = rk4(pruzini, 0, 10, [0 0.5 0 2.25], 200);
10 plot(t, y(:,2), t, y(:,4));
```



Пример Д.5

Да се реши диференцијалната равенка

$$y''' + 3y'' + 103y' + 101y = 50,$$

при следните почетни услови: $y(0) = 1$, $y'(0) = 9$ и $y''(0) = 0$.

За да можеме да го примениме методот на Рунге-Кута дадената равенка од трет ред треба да ја претвориме во систем од три равенки од прв ред.

$$y''' = -3y'' - 103y' - 101y + 50,$$

$$y'' = y',$$

$$y' = y'.$$

Воведуваме нова променлива

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \\ y \end{bmatrix},$$

Пример Д.5

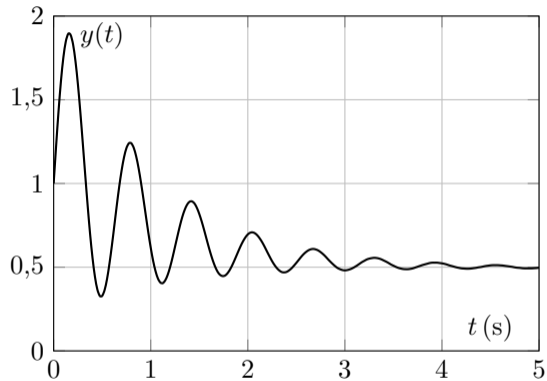
Систем равенки

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} -3 & -103 & -101 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

programi/dif_rav/dif_rav_primer5.m

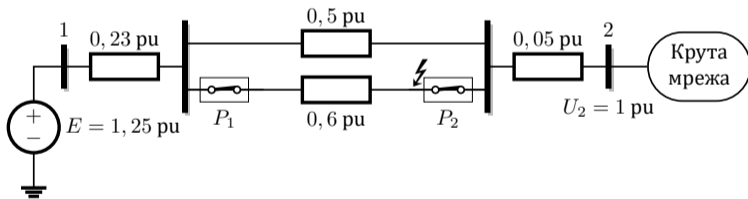
```
1 A = [-3 -103 -101
2       1   0   0
3       0   1   0];
4 d = @(t,u) A*u' + [50 0 0]';
5 [t, u] = rk4(d, 0, 5, [0 9 1], 200);
6 plot(t, u(:,3));
```

Пример Д.5



Пример 5.6

Го разгледуваме системот чија шема е прикажана на сликата. Во него настанала трифазна куса врска на еден од водовите во непосредна близина на прекинувачот P_2 . Податоците за параметрите на елементите од системот (изразени во pu) се прикажани на сликата. За генераторот е познато дека пред настанувањето на кусата врска работел со моќност $P_0 = P_m = 1$ pu, неговата номинална привидна моќност е $S_n = 1$ pu, а времето на залет $T_J = 6,66$ s.



Да се нацртаат кривите $\theta(t)$ и $f(t) = 50 + \Delta\omega(t)/(2\pi)$ за следните два случаја:

- кусата врска се исклучува по $0,15$ s,
- кусата врска се исклучува по $0,17$ s.

Пример 5.6

За анализата да се користи наједноставниот механички модел на генератор кој е даден со следните две диференцијални равенки:

$$\frac{d(\Delta\omega)}{dt} = \frac{P_m - P_e(\theta)}{M},$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta\omega,$$

каде што со $\Delta\omega$ е означена промената на аголната брзина на вртење во однос на номиналната.

Пример 5.6

Три агливи карактеристики на моќност $P_e(\theta) = P_{Mi} \cdot \sin \theta$

1. нормален работен режим,
2. режим на трифазна куса врска,
3. режим на работа по исклучувањето на кусата врска, кога повредениот вод е исклучен.

1. Нормален режим на работа

$$X_{\Sigma 1} = 0,23 + 0,5 \parallel 0,6 + 0,05 = 0,553 \text{ pu};$$

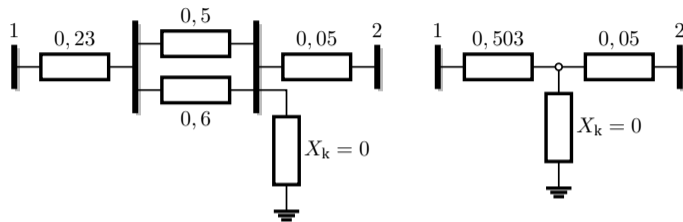
$$P_{M1} = \frac{E \cdot U_2}{X_{\Sigma 1}} = \frac{1,25 \cdot 1}{0,553} = 2,260 \text{ pu}.$$

2. Режим со трифазна куса врска

$$X_{12} = X_{\Sigma 2} = 0,503 + 0,05 + \frac{0,503 \cdot 0,05}{X_k} = \infty,$$

$$P_{M2} = \frac{E \cdot U_2}{X_{\Sigma 2}} = 0.$$

Пример 5.6



3. Режим кога повредениот вод е исклучен

$$X_{\Sigma 3} = 0,23 + 0,5 + 0,05 = 0,78 \text{ pu};$$

$$P_{M3} = \frac{E \cdot U_2}{X_{\Sigma 1}} = \frac{1,25 \cdot 1}{0,78} = 1,603 \text{ pu.}$$

Константата на инерција

$$M = \frac{S_n \cdot T_J}{\omega_0} = \frac{1 \cdot 6,66}{100 \cdot \pi} = 0,0212 \text{ pu.}$$

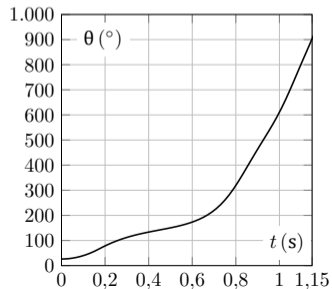
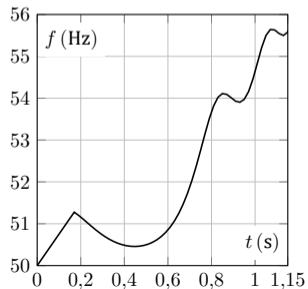
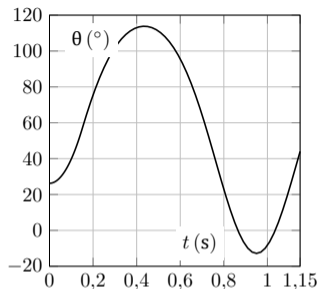
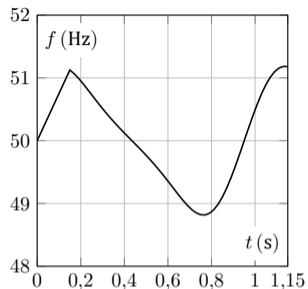
Пример 5.6

Проблемот ќе го решиме во два чекора бидејќи електричната моќност на генераторот има два одделни изрази за случајот со и без куса врска во мрежата. При тоа, променливите ги означуваме на следниот начин: $y_1 = \Delta\omega$ и $y_2 = \theta$.

programi/stab/iskl_vod_rk4.m

```
1 addpath('..../dif_rav');
2 Pm = 1; Pm1 = 2.26; Pm2 = 0; Pm3 = 1.603; M = 6.66/(100*pi);
3 t_iskl = 0.15;
4 % y(1) = delta_omega
5 % y(2) = teta
6 % rabota so rezim na kusa vrska od 0 do t_iskl
7 f = @(t,y) [Pm/M; y(1)];
8 [t, y] = rk4(f, 0, t_iskl, [0 asin(Pm/Pm1)], 50);
9 % rabota so isklucen vod od 0 do 1 sekunda
10 f = @(t,y) [(Pm - Pm3*sin(y(2)))/M; y(1)];
11 [t1, y1] = rk4(f, 0, 1, y(end,:), 50);
12 % dve resenija staveni posledovatelno
13 t = [t; t1 + t_iskl];
14 y = [y; y1];
15 figure; plot(t, 50 + y(:,1)/(2*pi)); grid;
16 figure; plot(t, y(:,2)/pi*180); grid;
```

Пример 5.6



Пример 5.7

Да се реши примерот 5.6, така што во системот ќе се земе предвид и автоматско повторно вклучување на водот кај кој настанала кусата врска. Во тој случај, по настанувањето на кусата врска, симулацијата на системот да се направи во следните три работни режими:

1. режим на трифазна куса врска кога е $P_{M2} = 0$ во траење од 0, 17 s,
2. режим на работа по исклучувањето на кусата врска, кога повредениот вод е исклучен при што е $P_{M3} = 1, 603$ pu во траење од 0, 2 s,
3. нормален работен режим по автоматско повторно вклучување на водот кога е $P_{M1} = 2, 26$ pu во траење од 1 s.

Да се нацртаат кривите $\theta(t)$ и $f(t) = 50 + \Delta\omega(t)/(2\pi)$.

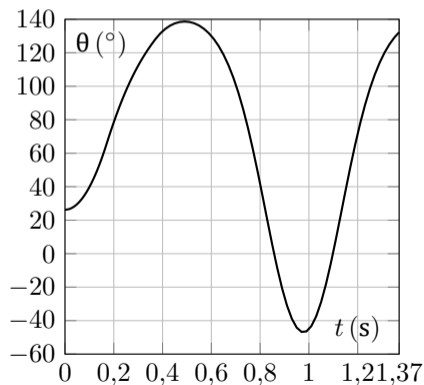
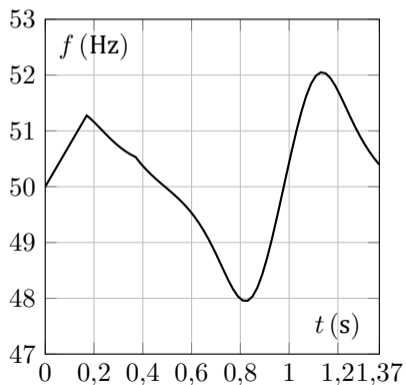
Пример 5.7

programi/stab/iskl_vod_rk4_apv.m

```
1 addpath('../dif_rav');
2 Pm = 1; Pm1 = 2.26; Pm2 = 0; Pm3 = 1.603; M = 6.66/(100*pi);
3 t_iskl = 0.17; t_apv = 0.2;
4 % y(1) = delta_omega
5 % y(2) = teta
6 % rabota so rezim na kusa vrska od 0 do t_iskl
7 f = @(t,y) [Pm/M; y(1)];
8 [t, y] = rk4(f, 0, t_iskl, [0 asin(Pm/Pm1)], 50);
9 % rabota so isklucen vod od 0 do t_apv
10 f = @(t,y) [(Pm - Pm3*sin(y(2)))/M; y(1)];
11 [t1, y1] = rk4(f, 0, t_apv, y(end,:), 50);
12 % rabota vo normalen rezim od 0 do 1 sekunda
13 f = @(t,y) [(Pm - Pm1*sin(y(2)))/M; y(1)];
14 [t2, y2] = rk4(f, 0, 1, y1(end,:), 50);
15 % trite resenija staveni posledovatelno
16 t = [t; t1 + t_iskl; t2 + t_iskl + t_apv];
17 y = [y; y1; y2];
18 figure; plot(t, 50 + y(:,1)/(2*pi)); grid;
19 figure; plot(t, y(:,2)/pi*180); grid;
```

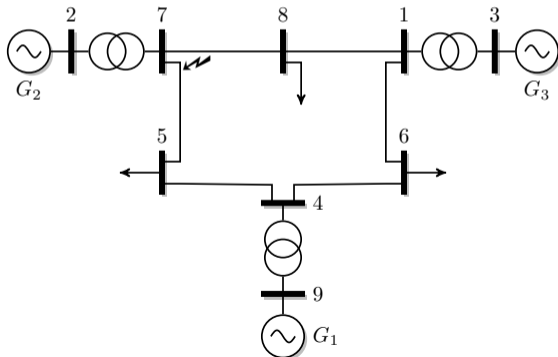
Пример 5.7

За разлика од случајот б) од примерот 5.6, кога за времетраење на кусата врска од 0, 17 s генераторот го изгуби синхронизмот, овде генераторот останува во синхронизам затоа што по 0, 2 s по исклучувањето на кусата врска ($t = 0, 37$) s, водот повторно се вклучува и генераторот оддава поголема електрична моќност со што посилно се кочи.



Пример 5.8

Го разгледуваме системот од примерот 5.4 во кој има трифазна куса врска на крајот од гранката 5-7 во непосредна близина на јазелот 7. Кусата врска се елиминира по $0,1\text{ s}$ со исклучување на гранката 5-7 која останува трајно исклучена. Да се определат промените на аглите на електромоторните сили на генераторите, како и релативните промени $\theta_{21}(t)$ и $\theta_{31}(t)$.



Пример 5.8

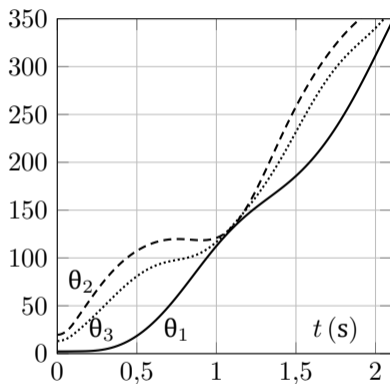
programi/stab/kusa_vrska_ees_9.m

```
1 ees = ees_9_jazli; % pocetna sestojba na sistemot
2 [Y, E] = matrica_yg(ees);
3 ees.E = abs(E); % EMS na generatorite
4 ees.teta = angle(E); % fazni agli
5 ees.Pm = real(E.*conj(Y*E)); % mehanicka moknost
6
7 ees.kv = [% kusa vrska
8         7 1e-6 % jazel Zk
9         ];
10 [Y, E] = matrica_yg(ees);
11 ees.Y = Y;
12 % resavanje na sistem od diferencijalni ravenki
13 ees.y0 = [ees.teta; zeros(3,1)];
14 t_kv = 0.1;
15 [t1, tetal, delta_omega1] = stabilnost(ees,t_kv,100);
16
17 ees.granka_iskl = [% isklucuvanje na grankata 7-5
18                 7 5 % pocetok kraj
19                 ];
20 ees = rmfield(ees, 'kv'); % brisenje na kusata vrska
21 [Y, E] = matrica_yg(ees);
```

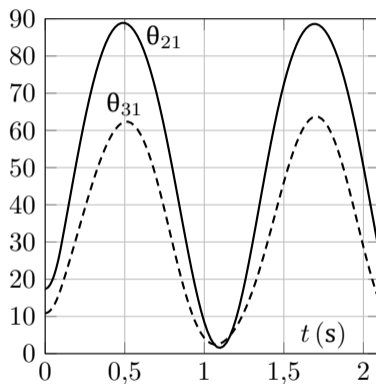
Пример 5.8

```
22 ees.Y = Y;
23 % resavanje na sistem od diferencijalni ravenki
24 ees.y0 = [teta1(end,:)'; delta_omega1(end,:)'];
25 [t2, teta2, delta_omega2] = stabilnost(ees,2,100);
26
27 t = [t1; t2+t_kv];
28 teta = [teta1; teta2]/pi*180;
29 close all
30 figure; plot(t,teta); xlabel('t [s]'); ylabel('teta [o]'); grid;
31 figure; plot(t,teta(:,2:3)-teta(:,1)); xlabel('t [s]'); ylabel('teta-teta_1 [o]'); grid;
```

Пример 5.8



a)



б)