Примена на симетрични компоненти за решавање трифазни електрични кола

М. Тодоровски

17.08.2018

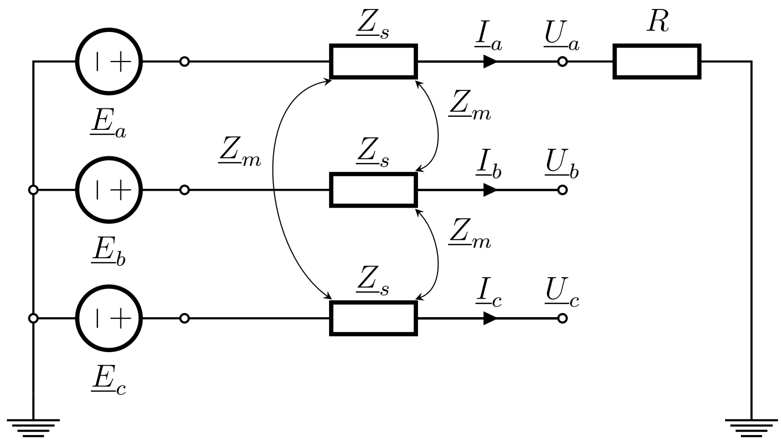
1 Примери

Пример 1.1.

На сликата 1 е прикажан симетричен трифазен вод со сопствени импеданции на фазите $\underline{Z}_s = j10\,\Omega$ и меѓусебни импеданции $\underline{Z}_m = j5\,\Omega$. Водот се се напојува од симетричен трифазен генератор со напони на фазите $\underline{E}_a = E$, $\underline{E}_b = \underline{a}^2 \cdot E$ и $\underline{E}_c = \underline{a} \cdot E$, при што е $E = 230\,\mathrm{V}$ и $\underline{a} = e^{j \cdot 2\pi/3} = -1/2 + j\sqrt{3}/2$. На крајот од водот само на фазата a е приклучен отпорник $R = 10\,\Omega$, додека фазите b и c се отворени. Да се пресметаат напоните на сите три фази на крајот од водот $\underline{U}_a$, $\underline{U}_b$ и $\underline{U}_c$, како и струите во фазите $\underline{I}_a$, $\underline{I}_b$ и $\underline{I}_c$. Пресметките да се направат на два начина

а) Решавајќи го колото во фазен домен сметајќи дека тоа се состои од 3 еднофазни генератори, 3 меѓусебно спрегнати импеданции и 1 отпорник,

б) Решавајќи го колото со примена на симетрични компоненти.



Слика 1. Симетричен трифазен вод со несиметричен потрошувач

Решение

а)

Фазните напони на трифазниот генератор можеме да ги напишеме во еден вектор со 3 елементи на следниот начин

$$\underline{\mathbf{E}}_{abc} = \begin{bmatrix} E \\ \underline{a}^2 \cdot E \\ \underline{a} \cdot E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 230 \\ -115 - j199,186 \\ -115 + j199,186 \end{bmatrix} \text{ V.} \tag{1}$$

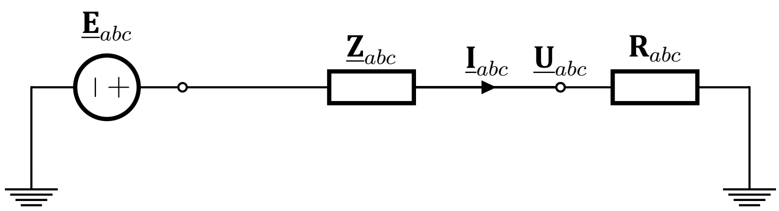
Водот кој се состои од 3 меѓусебно спрегнати импеданции можеме да го претставиме со редна импеданција во форма на матрица со димензии 3×3

$$\underline{\mathbf{Z}}_{abc} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_m & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_s & \underline{Z}_m \\ \underline{Z}_m & \underline{Z}_m & \underline{Z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j10 & j5 & j5 \\ j5 & j10 & j5 \\ j5 & j5 & j10 \end{bmatrix} \Omega, \tag{2}$$

додека за потрошувачот, кој нема спрегнати елементи по фази, можеме да ја напишеме следната дијагонална матрица, исто така со димензии 3×3

$$\mathbf{R}_{abc} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 10^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 10^8 \end{bmatrix} \Omega. \tag{3}$$

На таков начин, сметајќи ги сите елементи за трифазни, ја добиваме еквивалетната шема од сликата 2 во која ознаките за напони и струи се вектори со димензии 3×1, додека импеданциите и отпорностите се матрици со димензии 3×3.



Слика 2. Симетричен трифазен вод со несиметричен потрошувач – матрична претстава на елементите

За колото од сликата 2 можеме да ја напишеме следната матрична равенка

$$\underline{\mathbf{E}}_{abc} = (\underline{\mathbf{Z}}_{abc} + \mathbf{R}_{abc}) \cdot \underline{\mathbf{I}}_{abc}, \tag{4}$$

од каде што за струите во трите фази на водот добиваме

$$\underline{\mathbf{I}}_{abc} = (\underline{\mathbf{Z}}_{abc} + \mathbf{R}_{abc})^{-1} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{abc} = \tag{5}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 + j10 & j5 & j5 \\ j5 & 10^8 + j10 & j5 \\ j5 & j5 & 10^8 + j10 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 230 \\ -115 - j199,186 \\ -115 + j199,186 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,5 - j11,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ A,}$$

а потоа ги пресметуваме фазните напони на потрошувачот

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{U}}_{abc} &= \underline{\mathbf{E}}_{abc} - \underline{\mathbf{Z}}_{abc} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{abc} = \\ &= \begin{bmatrix} 230 \\ -115 - j199,186 \\ -115 + j199,186 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j10 & j5 & j5 \\ j5 & j10 & j5 \\ j5 & j5 & j10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11,5 - j11,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 115 - j115 \\ -172,5 - j256,686 \\ -172,5 + j141,686 \end{bmatrix} \text{V}. \end{aligned} \tag{6}$$

Постапката изгледа едноставно и не се разликува од решавање на еднофазно електрично коло со тоа што тука наместо со броеви оперираме во матрици и вектори. Главниот проблем е што во одреден момент се појавува потреба од инверзија на матрица со димензии 3×3, т.е. решавање на систем од 3 линеарни равенки.
б)

Започнуваме со последниот израз од решението од претходната точка

$$\underline{\mathbf{U}}_{abc} = \underline{\mathbf{E}}_{abc} - \underline{\mathbf{Z}}_{abc} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{abc}, \tag{7}$$

но тука, наместо да ги преметуваме фазните компоненти на напоните ќе извршиме трансформација на равенката во симетрични компоненти.

Од теоријата на електрични кола е познато дека векторот на фазните компоненти на напоните $\underline{\mathbf{U}}_{abc}$ можеме да го изразиме преку векторот на симетричните компоненти на напоните $\underline{\mathbf{U}}_{dio}$ со помош на следниот израз

$$\underline{\mathbf{U}}_{abc} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{dio}, \tag{8}$$

каде што е

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Аналогно на изразот (8), може да се напишат изрази и за напоните на генераторот и за струите во водот, така што равенката (7) можеме да ја напишеме на следниот начин

$$\underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_{dio} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{E}}_{dio} - \underline{\mathbf{Z}}_{abc} \cdot \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{dio}, \tag{10}$$

а откако ќе помножиме од лево со $\underline{\mathbf{F}}^{-1}$ добиваме

$$\underline{\mathbf{U}}_{dio} = \underline{\mathbf{E}}_{dio} - \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Z}}_{abc} \cdot \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{dio}, \tag{11}$$

односно

$$\underline{\mathbf{U}}_{dio} = \underline{\mathbf{E}}_{dio} - \underline{\mathbf{Z}}_{dio} \cdot \underline{\mathbf{I}}_{dio}, \tag{12}$$

каде што со $\underline{\mathbf{Z}}_{dio}$ е означена матрицата на импеданции на водот во симетрични компоненти.

Имајќи го предвид изразот (2) за редните импеданции на водот во фазни компоненти и изразот (9) за матрицата на трансформација, за матрицата на импеданции на водот во симетрични компоненти добиваме

$$\underline{\mathbf{Z}}_{dio} = \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{Z}}_{abc} \cdot \underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s - \underline{Z}_m & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_s - \underline{Z}_m & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_s + 2 \cdot \underline{Z}_m \end{bmatrix}, \tag{13}$$

од каде што гледаме дека таа е дијагонална. Тоа значи дека импеданциите во симетрични компоненти на водот не се спрегнати (важи само за симетрични водови). Ова значи дека пресметките за симетричните компоненти на струите и напоните ќе можеме да ги правиме за секоја компонента посебно, наместо да решаваме 3 равенки одеднаш како во претходната точка.

Елементите на дијагоналата во матрицата $\underline{\mathbf{Z}}_{dio}$ се нарекуваат директна, инверзна и нулта импеданција на водот и тие изнесуваат

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}_s - \underline{Z}_m = j5\,\Omega \tag{14}$$
$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_s - \underline{Z}_m = j5\,\Omega \tag{15}$$
$$\underline{Z}_o = \underline{Z}_s + 2\cdot\underline{Z}_m = j20\,\Omega \tag{16}$$

Имајќи го предвид изразот (1), за симетричните компоненти на напоните на трифазниот генератор имаме

$$\underline{\mathbf{E}}_{dio} = \underline{\mathbf{F}}^{-1}\cdot\underline{\mathbf{E}}_{abc} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

а потоа од (12) добиваме

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \\ \underline{U}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Z}_d\cdot\underline{I}_d \\ \underline{Z}_i\cdot\underline{I}_i \\ \underline{Z}_o\cdot\underline{I}_o \end{bmatrix}. \tag{18}$$

што во суштина се 3 одделни равенки.

Бидејќи на крајот на водот на фазите b и c нема поврзано ништо, можеме да напишеме

$$\underline{I}_b = \underline{I}_o + \underline{a}^2\cdot\underline{I}_d + \underline{a}\cdot\underline{I}_i = 0,$$
$$\underline{I}_c = \underline{I}_o + \underline{a}\cdot\underline{I}_d + \underline{a}^2\cdot\underline{I}_i = 0,$$

од каде што, водејќи сметка за идентитетот $1+\underline{a}+\underline{a}^2=0$, следува дека е

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_o. \tag{19}$$

Според тоа, за струјата во фазата a добиваме

$$\underline{I}_a = \underline{I}_o + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 3\cdot\underline{I}_d, \tag{20}$$

од каде што се гледа дека симетричните компоненти на струите се

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_o = \frac{\underline{I}_a}{3}. \tag{21}$$

Со земана на (21) во (18), добиваме

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \\ \underline{U}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Z}_d \\ \underline{Z}_i \\ \underline{Z}_o \end{bmatrix}\cdot\frac{\underline{I}_a}{3}, \tag{22}$$

или во развиена форма тоа се 3 одделни равенки

$$\underline{U}_d = E - \underline{Z}_d \cdot \frac{\underline{I}_a}{3}, \tag{23}$$

$$\underline{U}_i = -\underline{Z}_i \cdot \frac{\underline{I}_a}{3,} \tag{24}$$

$$\underline{U}_o = -\underline{Z}_o \cdot \frac{\underline{I}_a}{3}. \tag{25}$$

Знаејќи ги симетричните компоненти на напоните на крајот од водот, за напонот на фазата a можеме да напишеме

$$\underline{U}_a = \underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_o = E - (\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_o) \cdot \frac{\underline{I}_a}{3}. \tag{26}$$

Од друга страна, според колото од сликата 1, за напонот на фазата a имаме

$$\underline{U}_a = R \cdot \underline{I}_a, \tag{27}$$

така што, со замена во претходната равенка, за струјата во фазата a добиваме

$$\underline{I}_a = \frac{3 \cdot E}{3 \cdot R + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_o} = \frac{3 \cdot 230}{3 \cdot 10 + j5 + j5 + j20} = (11,5 - j11,5)\,\text{A} \tag{28}$$

Сега можеме да го пресметаме и напонот на фазата a кој изнесува

$$\underline{U}_a = R \cdot \underline{I}_a = 10 \cdot (11,5 - j11,5) = (115 - j115)\,\text{V}.$$

Според (23) - (25), за симетричните компоненти на напоните добиваме

$$\underline{U}_d = E - \underline{Z}_d \cdot \frac{\underline{I}_a}{3} = 230 - j5 \cdot \frac{11,5 - j11,5}{3} = (210,833 - j19,167)\,\text{V}$$

$$\underline{U}_i = -\underline{Z}_i \cdot \frac{\underline{I}_a}{3} = -j5 \cdot \frac{11,5 - j11,5}{3} = (-19,167 - j19,167)\,\text{V}$$

$$\underline{U}_o = -\underline{Z}_o \cdot \frac{\underline{I}_a}{3} = -j20 \cdot \frac{11,5 - j11,5}{3} = (-76,667 - j76,667)\,\text{V}$$

На крајот, користејќи ги симетричните компоненти на напоните, можеме да ги пресметаме напоните на фазите b и c

$$\underline{U}_b = \underline{U}_o + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_d + \underline{a} \cdot \underline{U}_i = (-172,5 - j256,686)\,\text{V},$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_o + \underline{a} \cdot \underline{U}_d + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_i = (-172,5 - j141,686)\,\text{V}.$$

Можеме да заклучиме дека при решавањето на несиметричното коло со помош на симетрични компоненти струјата на потрошувачот се добива со проста формула која гласи

$$\underline{I}_a = \frac{3 \cdot E}{3 \cdot R + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_o}.$$

Ако го разгледаме случајот кога е $R = 0$, кој се нарекува еднофазна куса врска, за струјата на куса врска добиваме

$$\underline{I}_a = \frac{3 \cdot E}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_o}. \tag{29}$$

Симетричните компоненти на струјата на еднофазна куса врска се

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_o = \frac{\underline{I}_a}{3} = \frac{E}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_o}. \tag{30}$$

Задачата можеме да ја решиме во Matlab со помош на следната програма nesim_kolo.m

```
a = exp(1j*2*pi/3);
E = 230;
R = 10;
Zs = 1j*10;
Zm = 1j*5;

disp('a)');
Eabc = E *[1; a^2; a];
Zabc = [Zs Zm Zm
        Zm Zs Zm
        Zm Zm Zs];
Rabc = diag([R 1e8 1e8]);
Iabc = (Zabc + Rabc)\Eabc
Uabc = Rabc*Iabc

disp('b)');
Zd = Zs - Zm;
Zi = Zs - Zm;
Zo = Zs + 2*Zm;
Ia = 3*E/(3*R + Zd + Zi + Zo)
Ud = E - Zd*Ia/3
Ui = -Zi*Ia/3
Uo = -Zo*Ia/3
Ua = Ud + Ui + Uo
Ub = a^2*Ud + a*Ui + Uo
Uc = a*Ud + a^2*Ui + Uo
```

со чие активирање се добива

```
>> nesim_kolo
a)
Iabc =
  11.5000 -11.5000i
  -0.0000 - 0.0000i
  -0.0000 + 0.0000i
Uabc =
   1.0e+02 *
   1.1500 - 1.1500i
  -1.7250 - 2.5669i
  -1.7250 + 1.4169i
b)
Ia =
  11.5000 -11.5000i
Ud =
   2.1083e+02 - 1.9167e+01i
Ui =
 -19.1667 -19.1667i
Uo =
 -76.6667 -76.6667i
Ua =
   1.1500e+02 - 1.1500e+02i
Ub =
  -1.7250e+02 - 2.5669e+02i
Uc =
  -1.7250e+02 + 1.4169e+02i
```

□