

Високонапонски мрежи и системи

Стабилност на работа на ЕЕС

М. Тодоровски

Институт за преносни електроенергетски системи
Факултет за електротехника и информациски технологии
Универзитет Св. Кирил и Методиј

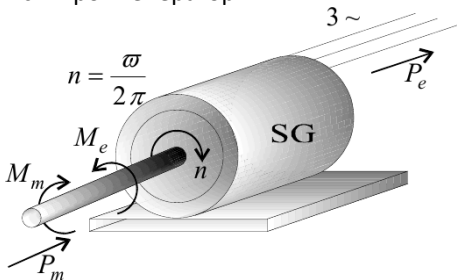
mirko@feit.ukim.edu.mk
pees.feit.ukim.edu.mk

Скопје, 2019

- Електромеханички преодни процеси при промена на режимот на работа на ЕЕС
 - ▶ Нормални мали промени кои постојано се случуваат поради промени на оптоварувањето или промени во регулацијата на генераторите – **статичка стабилност**
 - ▶ Нагли значителни промени на режимот на работа на системот поради појава на куси врски или испад на потрошувач, генератор или елемент од мрежата – **динамичка стабилност**
- Преодни процеси → диференцијални равенки
- Анализите на стабилноста на ЕЕС овде ќе имаат „инженерски“ карактер, што значи дека ќе правиме разни занемарувања и упростувања, но такви, кои квалитативно нема да ја изменат сликата на посматраните појави
- Упростувањата ќе ни овозможат примена на познати практични математички методи и постапки, коишто на доволно брз и едноставен начин ќе ни дадат резултати со задоволителна точност

Равенка на движење на синхрон агрегат

Синхрон агрегат претставува машинска група која се состои од турбина и синхрон генератор



$$J \frac{d\omega}{dt} = M_m - M_e$$

$$J\omega \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e \quad \text{нелинеарност: } \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega \approx \omega_o = 2\pi f$$

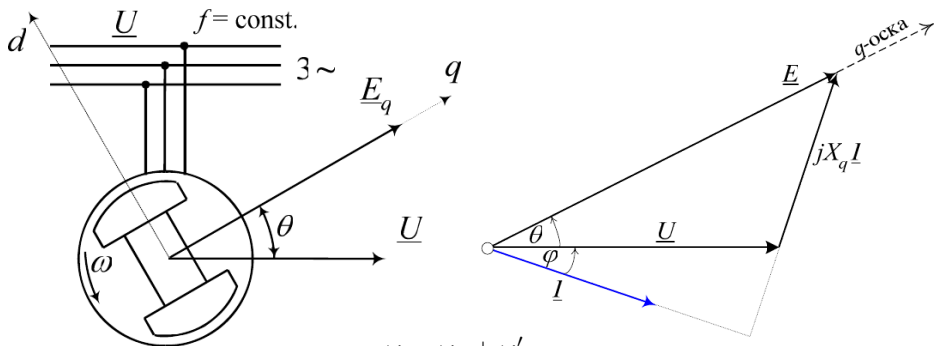
$$J\omega_o \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e$$

Време на залет T_J – време за кое што агрегатот ќе се залета од $\omega = 0$ до $\omega = \omega_o$ под дејство на константен момент $M_n = S_n/\omega_o$ (момент при $P = S_n$ и $\cos \varphi = 1$)

$$T_J = \frac{J\omega_o^2}{S_n} \Rightarrow J\omega_o = \frac{S_n T_J}{\omega_o}$$

$$\frac{S_n T_J}{\omega_o} \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e$$

Агол на изместување



$$\omega = \omega_o + \omega'$$

$$\theta = \theta_o + \omega' t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega' = \omega - \omega_o$$

$$\omega = \omega_o + \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Агол на изместување

Замената на брзината ω со аголот на изместување θ во равенката на движење ја вршime затоа што електричната моќност P_e што синхрониот генератор ја оддава во мрежата може да се изрази во зависност аголот θ и од величините E_q и U .

$$\frac{S_n T_J}{\omega_o} \frac{d^2\theta}{dt^2} = P_m - P_e(\theta)$$

турбогенератори $X_d = X_q$

$$P_e = \frac{E_q U}{X_d} \sin \theta = P_M \sin \theta$$

хидрогенератори $X_d > X_q$

$$P_e = \frac{E_q U}{X_d} \sin \theta + \frac{U^2}{2} \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \sin 2\theta$$

Асинхрона моќност

Се јавува во случајот кога постои релативно движење на роторот и вртливото магнетно поле, т.е. кога е $\omega \neq \omega_o$ и се стреми да ги израмни брзините ω и ω_o

$$P_a = K_p \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{S_n T_J}{\omega_o} \frac{d^2\theta}{dt^2} + K_p \frac{d\theta}{dt} = P_m - P_e(\theta)$$

$$M \frac{d^2\theta}{dt^2} + K_p \frac{d\theta}{dt} = P_m - P_e(\theta)$$

константа на инерција

$$M = \frac{S_n T_J}{\omega_o} \left[\frac{\text{MW} \cdot \text{s}^2}{\text{rad}} \right] \quad \text{или} \quad M = \frac{S_n T_J}{360f} \left[\frac{\text{MW} \cdot \text{s}^2}{\text{°el}} \right]$$

за турбоагрегати $T_j = 4 \div 12 \text{ s}$

за хидроагрегати $T_j = 4 \div 9 \text{ s}$

Еквивалентирање на група од k агрегати

Повеќе агрегати приклучени на заеднички собирници

$$M_e = M_1 + M_2 + \dots + M_k = \sum_{i=1}^k M_i$$

$$S_e = S_{n1} + S_{n2} + \dots + S_{nk} = \sum_{i=1}^k S_{ni}$$

$$T_{Je} = \frac{S_{n1} T_{J1} + S_{n2} T_{J2} + \dots + S_{nk} T_{Jk}}{S_e} = \frac{\sum_{i=1}^k S_{ni} T_{Ji}}{S_e}$$

идентични агрегати

$$M_e = k \cdot M$$

$$S_e = k \cdot S_n$$

$$T_{Je} = T_J$$

Упростувања

- Занемарување на придушниот момент $K_p d\theta / dt$

Без придушување осцилациите во преодниот режим ќе траат бесконечно долго време. Доколку за решението добиеме дека има осцилаторен карактер тоа ќе значи дека системот е стабилен.

- Занемарување на дејството на турбинскиот регулатор

Турбинскиот регулатор делува за 0,5 до 1 s од почетокот на преодниот режим. Но тој нема да ја измени сликата на проблемот, бидејќи прашањето дали системот е стабилен или не е веќе решено во периодот кога турбинскиот регулатор сè уште не проработил.

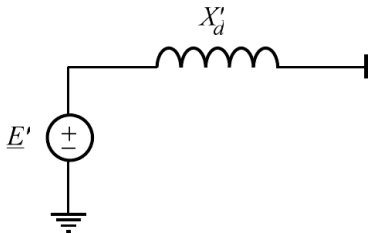
- Занемарување на испакнатоста на половите кај хидрогенераторите

$$\frac{E_q U}{X_d} \sin \theta \gg \frac{U^2}{2} \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \sin 2\theta \quad \Rightarrow \quad P_e = \frac{E_q U}{X_d} \sin \theta$$

Амплитудата на вториот хармоник изнесува обично само 10%–15% од амплитудата на основната синусоида и има многу мало влијание на преодните процеси.

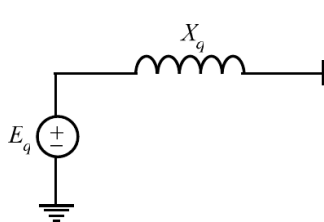
Модел на синхрон генератор при анализите на динамичка стабилност

Во преодните режими, со оглед на кусото времетраење на суптранзиентниот период, за сето време додека трае преодниот процес ќе можеме да сметаме дека реактанцијата на синхронниот генератор е еднаква на транзиентната реактанција X'_d .

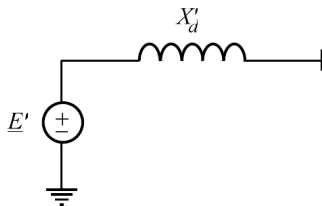


Модел на синхрон генератор при анализите на статичка стабилност

Моделот што зависи не само од параметрите на синхроната машина, туку и од начинот на регулација на возбудата во роторската намотка.



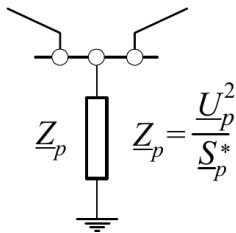
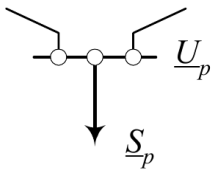
без регулација на напон



со автоматски регулатор од пропорционален тип

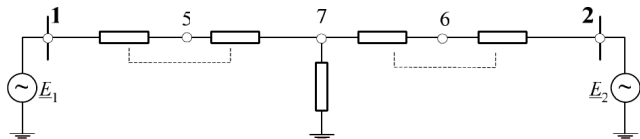
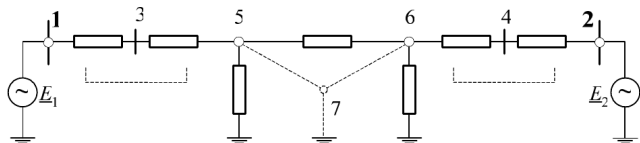
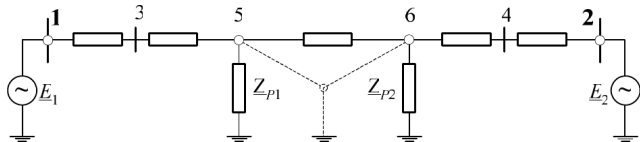
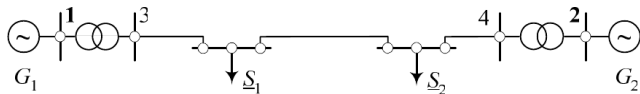
Ако генератор има **брз автоматски регулатор на возбудата**, при анализите на статичката стабилност тој се моделира со **идеален напонски генератор** ($E = U$).

Еквивалентирање на потрошувачите

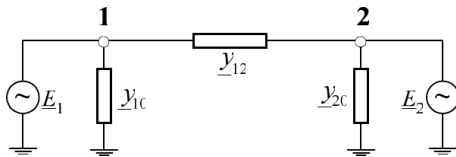
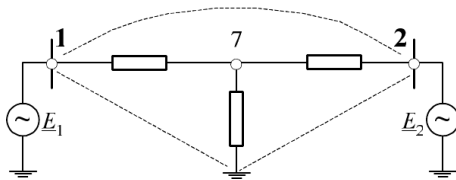


- Потрошувачите се еквивалентираат со константна импеданција.
- Потрошувачите ги третираме како „дел од мрежата“, така што нивните импеданции ќе ги „вградиме“ во мрежата со што потрошувачките јазли стануваат пасивни.
- Со редукција на матрицата на адмитанции на мрежата можеме да ги елиминираме сите пасивни јазли со што ќе оперираме само со „генераторските јазли“.

Редукција на јазли во мрежата



Редукција на јазли во мрежата



$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_{10} + \underline{y}_{12} & -\underline{y}_{12} \\ -\underline{y}_{12} & \underline{y}_{20} + \underline{y}_{12} \end{bmatrix}$$

Аглови карактеристики на моќност

Прво ги пресметуваме струите што генераторите ги инјектираат во мрежата

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{E}}$$

каде што $\underline{\mathbf{Y}}$ е матрицата на адмитанции за генераторските јазли, а $\underline{\mathbf{E}}$ е вектор со електромоторните сили на генераторите

$$\underline{E}_i = E_i \cdot e^{j\theta_i}$$

Модулот на електромоторната сила E_i е познат од состојбата пред да настане пореметувањето, а нејзиниот фазен агол θ_i е променлив.

$$P_{e,i} = \text{real}(\underline{E}_i \cdot \underline{I}_i^*)$$

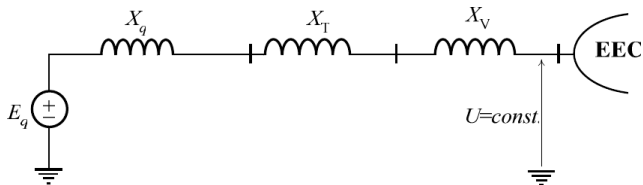
Случај со 2 генератора

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} E_1 e^{j\theta_1} + \underline{Y}_{12} E_2 e^{j\theta_2}$$

$$P_{e,1} = \text{real} \left[E_1 e^{j\theta_1} \cdot \left(\underline{Y}_{11}^* E_1 e^{-j\theta_1} + \underline{Y}_{12}^* E_2 e^{-j\theta_2} \right) \right]$$

$$P_{e,1} = \text{real} \left[E_1^2 \underline{Y}_{11}^* + E_1 E_2 \underline{Y}_{12}^* e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \right]$$

Генератор на крута мрежа



$$X = X_q + X_T + X_V$$

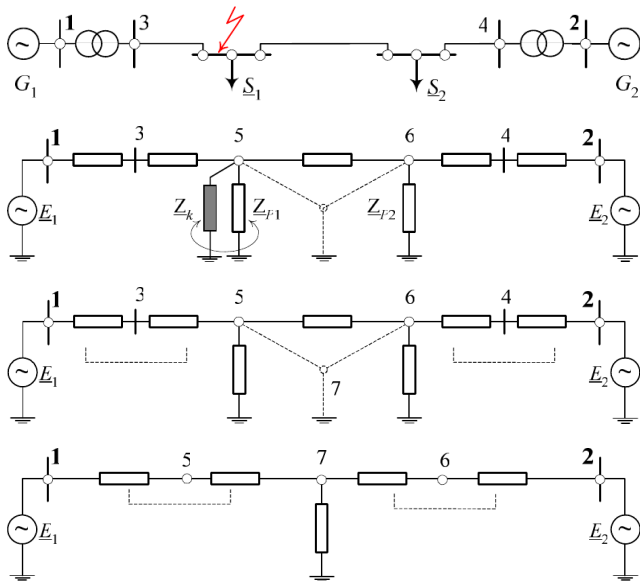
$$\underline{Y}_{11} = -j/X \quad \underline{Y}_{12} = j/X \quad \theta_2 = 0$$

$$P_{e,1} = \text{real} \left[E_1^2 \underline{Y}_{11}^* + E_1 E_2 \underline{Y}_{12}^* e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \right]$$

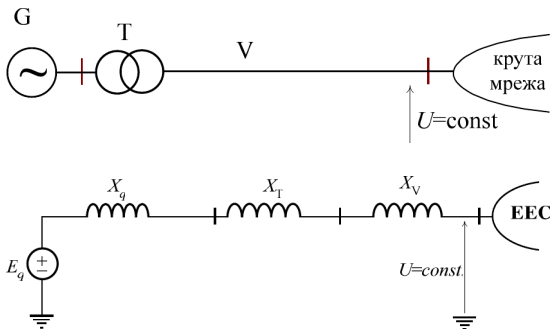
$$P_{e,1} = \text{real} \left[jE_q^2/X - jE_q U/X \cdot (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1) \right]$$

$$P_{e,1} = \frac{E_q U}{X} \sin \theta_1$$

Редукција на јазли во мрежата при куца врска



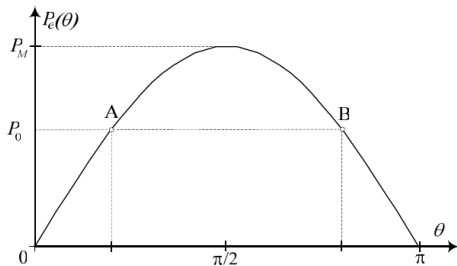
Статичка стабилност на генератор



$$X = X_q + X_T + X_V$$

$$P_e = \frac{E_q U}{X} \sin \theta = P_M \sin \theta$$

Статичка стабилност на генератор



$$P_o = P_M \sin \theta_o$$

$$\theta = \theta_o + \Delta\theta$$

$$P_e = P_M \sin(\theta_o + \Delta\theta)$$

$$\Delta P = P_m - P_e = P_M \sin \theta_o - P_M \sin(\theta_o + \Delta\theta)$$

$$\sin(\theta_o + \Delta\theta) = \sin \theta_o + \cos \theta_o \cdot \Delta\theta - \sin \theta_o \cdot \frac{\Delta\theta}{2} + \dots \approx \sin \theta_o + \cos \theta_o \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta P = -P_M \cos \theta_o \cdot \Delta\theta$$

Статичка стабилност на генератор

$$\Delta P = -P_M \cos \theta_o \cdot \Delta \theta$$

$$\Delta P = - \left. \frac{dP}{d\theta} \right|_o \cdot \Delta \theta = -P_s \Delta \theta$$

$$P_s = \left. \frac{dP}{d\theta} \right|_o = P_M \cos \theta_o \quad \text{синхронизациона моќност}$$

$$M \frac{d^2 \theta}{dt^2} = P_m - P_e = -P_s \Delta \theta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{P_s}{M} \Delta \theta = 0$$

$$\frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} + \frac{P_s}{M} \Delta \theta = 0$$

$$\Delta \theta(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

$$r^2 + P_s/M = 0$$

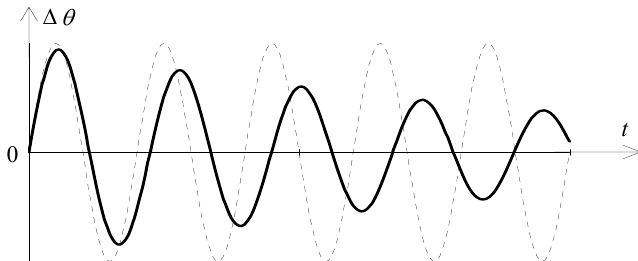
$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-P_s/M}$$

Статичка стабилност на генератор

Ако е $P_s > 0$

$$r_{1,2} = \pm j\omega_n \quad \omega_n = \sqrt{P_s/M} = \sqrt{P_M \cos \theta_o / M}$$

$$\Delta\theta(t) = K_1 e^{j\omega_n t} + K_2 e^{-j\omega_n t} = K \sin(\omega_n t + \varphi)$$

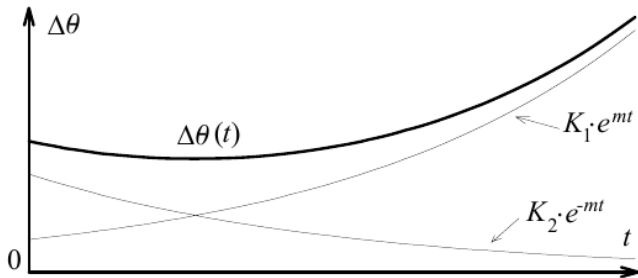


генераторот е стабилен

Статичка стабилност на генератор

Ако е $P_s < 0$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{P_s/M} = \pm m$$
$$\Delta\theta(t) = K_1 e^{mt} + K_2 e^{-mt}$$



генераторот не е стабилен

Метод на мали осцилации

Линеаризација на диференцијалните равенки

$$M_i \frac{d^2 \theta_i}{dt^2} = \Delta P_i \approx \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right|_o \cdot \Delta \theta_j$$

$$M_i \frac{d^2 \Delta \theta_i}{dt^2} \approx \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right|_o \cdot \Delta \theta_j$$

$$\Delta \theta_1'' + A_{11} \Delta \theta_1 + A_{12} \Delta \theta_2 + \dots + A_{1n} \Delta \theta_n = 0$$

$$\Delta \theta_2'' + A_{21} \Delta \theta_1 + A_{22} \Delta \theta_2 + \dots + A_{2n} \Delta \theta_n = 0$$

⋮

$$\Delta \theta_n'' + A_{n1} \Delta \theta_1 + A_{n2} \Delta \theta_2 + \dots + A_{nn} \Delta \theta_n = 0$$

$$A_{ij} = \frac{1}{M_i} \cdot \left. \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} \right|_o$$

$$\Delta \theta_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{r_j t}$$

Метод на мали осцилации

$$\Delta\theta_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} e^{r_j t}$$

За решението да биде осцилаторно или придушено осцилаторно (системот е стабилен) треба сите r_j да се комплексни броеви со реални делови помали или еднакви на нула.

Вредностите r_j се сопствени вредности на матрицата

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Решение во Matlab

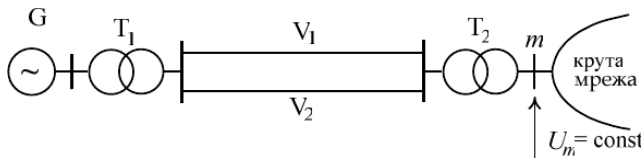
`r = eig(A)`

Динамичка стабилност на ЕЕС

Анализи на преодните електромеханички процеси до кои доаѓа при големи пореметувања

- Нагли вклучувања или исклучувања на големи потрошувачи
- Промените во конфигурацијата на мрежата: вклучувања или исклучувања на поважни водови или трансформатори
- Наглите испади на големи генераторски единици
- Сите видови на куси врски во ЕЕС

Генератор и крута мрежа

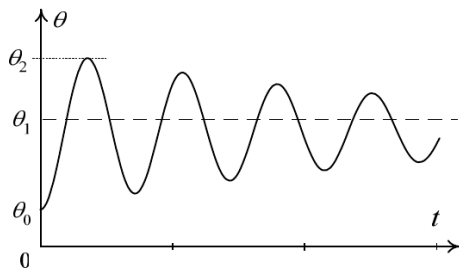
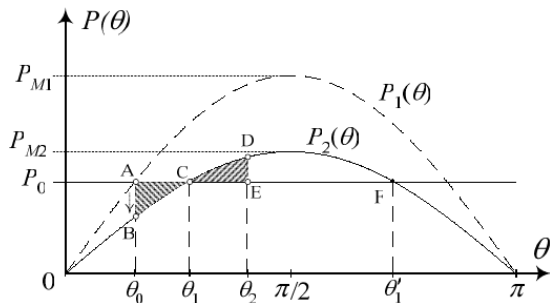


$$P_1(\theta) = \frac{E' U_m}{X_{\Sigma 1}} \sin \theta = \frac{E' U_m}{X'_d + X_{T1} + X_{V1} || X_{V2} + X_{T2}} \sin \theta = P_{M1} \sin \theta$$

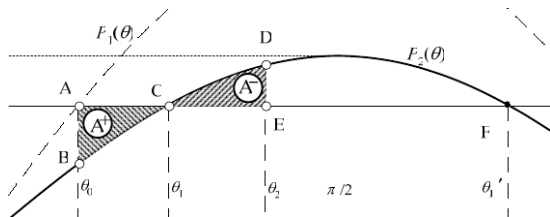
нагло исклучување на водот V1

$$P_2(\theta) = \frac{E' U_m}{X_{\Sigma 2}} \sin \theta = \frac{E' U_m}{X'_d + X_{T1} + X_{V2} + X_{T2}} \sin \theta = P_{M2} \sin \theta$$
$$P_{M2} < P_{M1}$$

Генератор и крута мрежа



Правило на еднакви површини



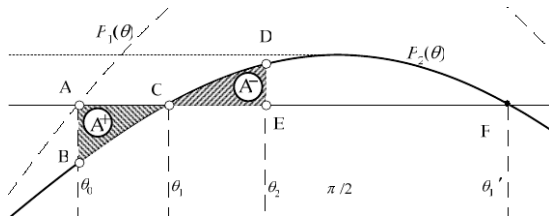
забрзување од θ_0 до θ_1 – прираст на кинетичката енергија на роторот

$$\Delta W_k = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Delta M(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\Delta P(\theta)}{\omega} d\theta \approx \frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Delta P(\theta) d\theta$$

успорување од θ_1 до θ_2 – опаѓање на кинетичката енергија на роторот
при $\theta = \theta_2$ вкупната промена на кинетичката енергија е 0

$$\frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_0}^{\theta_2} \Delta P(\theta) d\theta = \frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \Delta P(\theta) d\theta + \frac{1}{\omega_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta P(\theta) d\theta = 0$$

Правило на еднакви површини



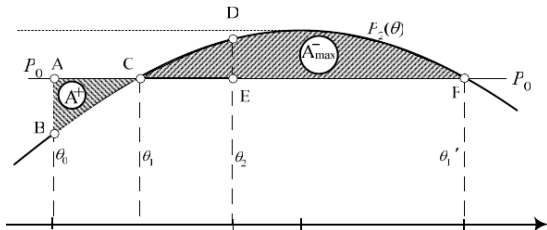
$$\frac{1}{\omega_o} \int_{\theta_o}^{\theta_1} \Delta P(\theta) d\theta + \frac{1}{\omega_o} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Delta P(\theta) d\theta = 0$$

$$A^+ = \int_{\theta_o}^{\theta_1} \Delta P(\theta) d\theta \quad A^- = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\Delta P(\theta) d\theta$$

$$A^+ = A^-$$

површина на забрзување A^+
површина на успорување A^-

Правило на еднакви површини



$$A_{\max}^- = \int_{\theta_1}^{\theta'_1} -\Delta P(\theta) d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta'_1} (P_{M2} \sin \theta - P_o) d\theta$$

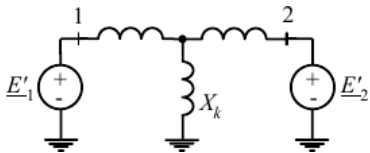
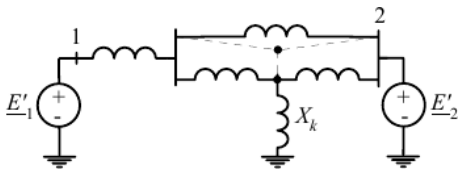
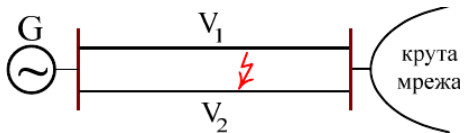
за да биде предниот процес осцилаторен, т.е. за системот да биде динамички стабилен, потребно е

$$A_{\max}^- > A^+$$

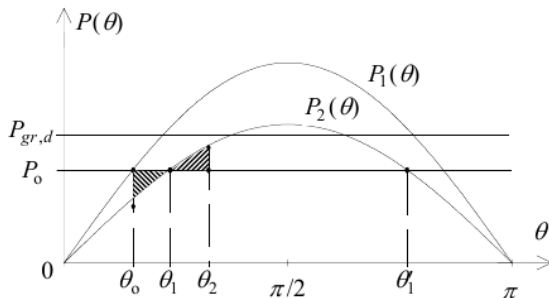
коэффициент на динамичка резерва

$$k_d = \frac{A_{\max}^-}{A^+} > 1$$

Трајна куца врска на вод



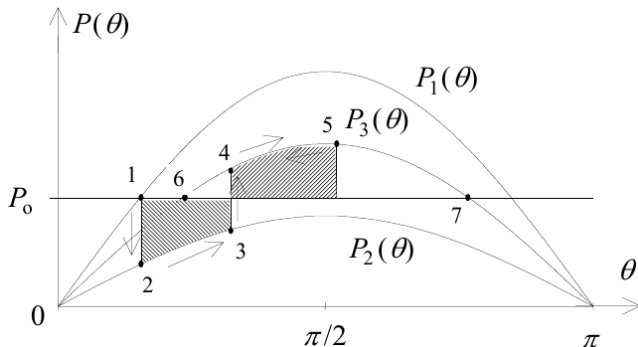
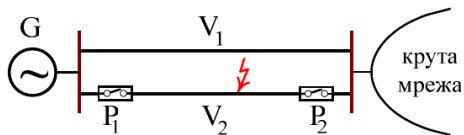
Трајна куса врска на вод



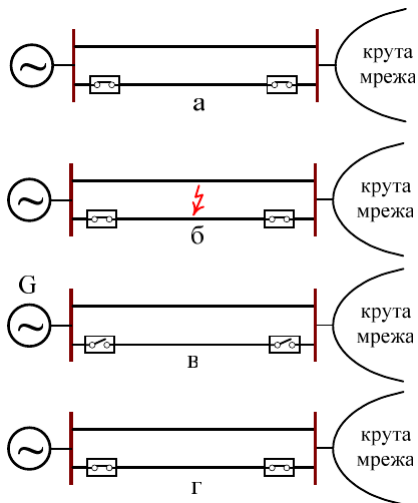
Со помош на правилото на еднакви површини можеме да ја одредиме граничната динамичка моќност $P_{gr,d}$ што генераторот може да ја оддава во претходниот режим, а по кусата врска се уште да биде динамички стабилен.

Во тој случај без истражување на преодниот процес ќе знаеме дали во една конкретна ситуација системот ќе биде динамички стабилен (ако е $P_o \leq P_{gr,d}$) или нестабилен (ако е $P_o > P_{gr,d}$).

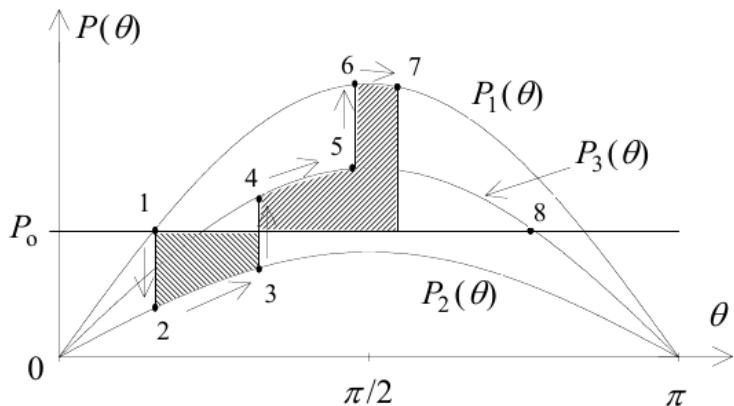
Куса врска со исклучување на повредениот вод



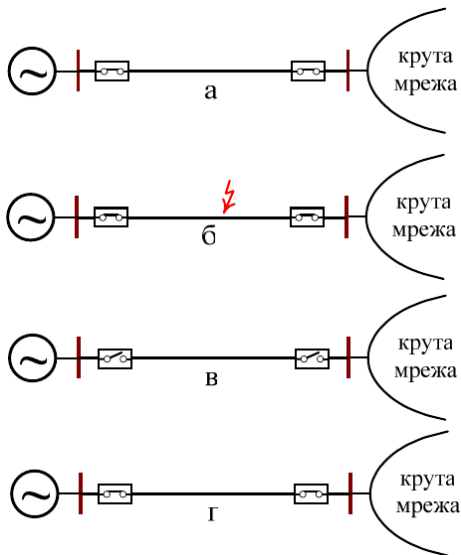
Куса врска со исклучување и со автоматско повторно вклучување (АПВ)



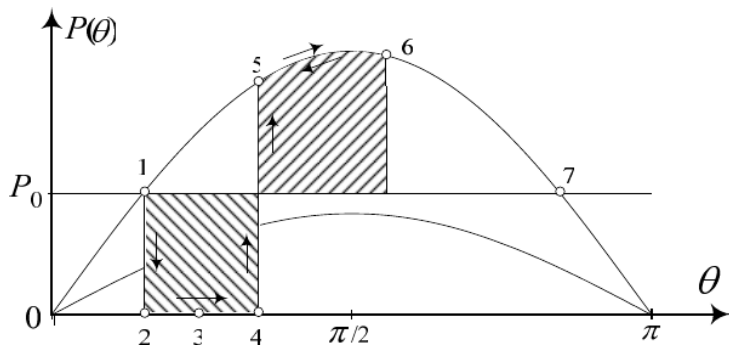
Куса врска со исклучување и со автоматско повторно вклучување (АПВ)



Куси врски во преносен систем со еден вод



Куси врски во преносен систем со еден вод



Нумеричко решавање на диференцијални равенки

- Во ЕЕС решенијата на диференцијалните равенки, се функции со кои што е дадена временската промена на напон, струја, агол на роторот на генератор итн.
- Егзактното решавање на диференцијалните равенки ги дава овие функции во аналитички облик со сложени изрази од независната променлива (време).
- Инженерскиот пристап кон добивањето на решението е поинаков затоа е сосема доволно да го познаваме решението дадено во нумерички облик од кој што можеме да ги извлечеме сите потребни заклучоци.
- Нумеричкото решение е дадено во вектори кои што содржат нумерички вредности на функциите кои што ги бараме за одредени вредности на независната променлива (одредени временски моменти).
- Во Matlab постојат повеќе методи за нумеричко решавање на системи диференцијани равенки од прв ред како што се `ode23`, `ode45`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`, `ode23t` и `ode23tb`.

Општ облик на равенките

Решавање на системи диференцијални равенки од прв ред од следниот облик

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}$$

Диференцијалните равенки треба да бидат така што од левата страна ќе бидат дадени првите изводи на зависните променливи y_1, y_2, \dots, y_n , додека од десната страна може да има изрази од произволен облик кој што може да ги содржи сите зависни променливи како и за независната променлива t .

Пример 1

Го разгледуваме следниот едноставен систем од 2 диференцијални равенки од прв ред

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= 2 \cdot y_1 - 0,001 \cdot y_1 \cdot y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -10 \cdot y_2 + 0,002 \cdot y_1 \cdot y_2,\end{aligned}$$

со почетни услови $y_1(0) = 5000$ и $y_2(0) = 100$. При тоа, ќе ги определиме функциите $y_1(t)$ и $y_2(t)$, како и нивните максимални вредности.

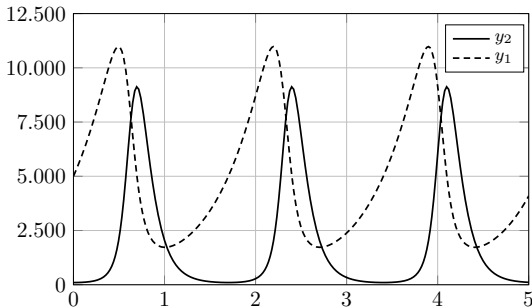
Пример 1

programi/primer_ode45.m

```
1 clc; clear
2 f = @(t,y) [2*y(1) - 0.001*y(1)*y(2); -10*y(2) + 0.002*y(1)*y(2)];
3 [t, y] = ode45(f,[0 5],[5000 100]);
4 plot(t,y);
5 ymax = max(y)
```

```
>> primer_ode45
```

```
ymax =
 1.0e+04 *
 1.0978  0.9126
```



Метод на Ојлер

Методот на Ојлер нема практична примена и тој само ќе ни послужи да го илустрираме концептот за нумеричко решавање на диференцијални равенки.

$$y' = f(t, y)$$

интервалот $[a, b]$ го делиме на n подинтервали

$$t_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

чекорот е $h = (b - a)/n$

развијање на функцијата во Тајлоров ред

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h \cdot y'(t_0) + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y''(t_0) + O(h^3).$$

ги занемариме членовите од втор и повисок ред и пишуваме $y_1 = y(t_0 + h)$ и $y_0 = y(t_0)$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0).$$

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Пример 2

Со методот на Ојлер ќе пробаме да ја решиме диференцијалната равенка

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

во интервалот $[0, 4]$, при што ќе користиме $n = 8$ подинтервали ($h = 0,5$). За оваа равенка го знаеме аналитичкото решение $y = e^t$.

Во овој случај имаме $y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i$, според тоа постапката за решавање на равенката е следната

$t_0 = 0$	$y_0 = 1$
$t_1 = 0,5$	$y_1 = 1 + 0,5 \cdot 1 = 1,5$
$t_2 = 1$	$y_2 = 1,5 + 0,5 \cdot 1,5 = 2,25$
$t_3 = 1,5$	$y_3 = 2,25 + 0,5 \cdot 2,25 = 3,375$
$t_4 = 2$	$y_4 = 3,375 + 0,5 \cdot 3,375 = 5,0625$
$t_5 = 2,5$	$y_5 = 5,0625 + 0,5 \cdot 5,0625 = 7,59375$
$t_6 = 3$	$y_6 = 7,59375 + 0,5 \cdot 7,59375 = 11,39062$
$t_7 = 3,5$	$y_7 = 11,39062 + 0,5 \cdot 11,39062 = 17,08594$
$t_8 = 4$	$y_8 = 17,08594 + 0,5 \cdot 17,08594 = 25,62891$

Пример 2

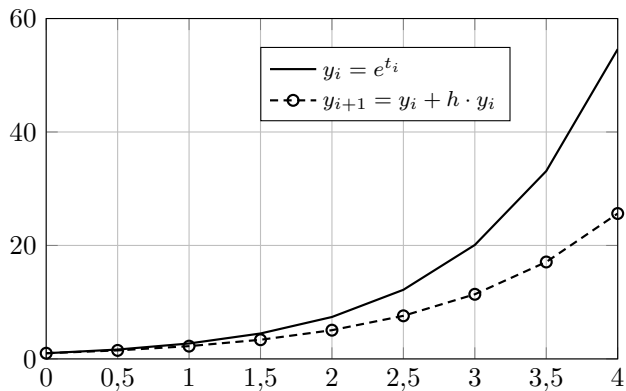
Од резултатите гледаме дека последната вредност $y_8 = 25,62891$ се разликува од точната вредност $e^4 = 54,59815$ за $-53,1\%$ што е многу голема грешка.

Ако сакаме да постигнеме поголема точност треба да го зголемиме бројот на точки. На пример за $n = 1000$ грешката кај y_8 изнесува $-0,8\%$.

programi/ojler_primer1.m

```
1 clc; clear;
2 y(1) = 1; t(1) = 0; n = 8; h = 4/n;
3 for i = 1:n
4     t(i+1) = t(i) + h;
5     y(i+1) = y(i) + h * y(i);
6     fprintf('%i %.1f %8.5f\n', i, t(i+1), y(i+1));
7 end
8 greska = (y(n+1)/exp(t(n+1)) - 1) * 100
9 plot(t, y, '--ko', t, exp(t), 'k');
```

Пример 2



Модифициран метод на Ојлер

- Првиот чекор е идентичен со чекорот кај претходно опишаниот метод на Ојлер. Со тоа се добива апроксимација за $y_{i+1}^{(1)}$.
- Во вториот чекор се пресметува нова апроксимација $y_{i+1}^{(2)}$ во која се користи средна вредност од изводот на почетокот на подинтервалот i и на апроксимираната вредност на изводот на крајот од подинтервалот добиена во првата фаза.

$$t_{i+1} = t_i + h,$$
$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$
$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(t_i, y_i) + f(t_i, y_{i+1}^{(1)})}{2}.$$

Модифициран метод на Ојлер

programi/ojler.m

```
1 function [t, y] = ojler(f,a,b,y0,n)
2 h = (b - a) / n;
3 y(1,:) = y0;
4 t(1) = a;
5 for i = 1:n
6     t(i+1,1) = t(i) + h;
7     y1 = y(i,:) + h * f(t(i), y(i,:));
8     y(i+1,:) = y(i,:) + h * (f(t(i), y(i,:)) + f(t(i), y1))'/2;
9 end
```

Со функцијата `ojler` можеме да ја решиме диференцијалната равенка $y' = y$ при почетен услов $y(0) = 1$ на следниот начин

programi/ojler_primer2.m

```
1 clc; clear;
2 f = @(t, y) y;
3 [t, y] = ojler(f,0,4,1,35);
4 greska = (y(end)/exp(t(end)) - 1) * 100
5 plot(t, y, '--ko', t, exp(t), 'k');
```

со $n = 35$ со модифицираниот метод на Ојлер се добива грешка од $-0,8\%$

Метод на Рунге-Кута

Едноставниот чекор кој се користи во секој подинтервал i според методот на Ојлер може да се употреби како „пробен“ чекор до средината на подинтервалот. Потоа, пресметаната вредност во средната точка може да се искористи за пресметка на „вистинскиот“ чекор за целиот подинтервал.

$$t_{i+1} = t_i + h$$

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + k_2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Метод на Рунге-Кута

Постапката со „пробно“ движење низ подинтервалот во повеќе мали чекори може да продолжи и понатаму, со што се добиваат методи од класата на Рунге-Кута од повисок ред. Најпознат од тие методи е методот на Рунге-Кута од 4 ред.

$$t_{i+1} = t_i + h,$$

$$k_1 = h \cdot f(t_i, y_i),$$

$$k_2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k_3),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6}.$$

Метод на Рунге-Кута

programi/rk4.m

```
1 function [t, y] = rk4(f,a,b,y0,n)
2 h = (b - a) / n;
3 y(1,:) = y0;
4 t(1) = a;
5 for i = 1:n
6     k1 = h * f(t(i), y(i,:))';
7     k2 = h * f(t(i) + h/2, y(i,:) + k1/2)';
8     k3 = h * f(t(i) + h/2, y(i,:) + k2/2)';
9     k4 = h * f(t(i) + h, y(i,:) + k3)';
10    t(i+1,1) = t(i) + h;
11    y(i+1,:) = y(i,:) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
12 end
```

Решението на диференцијалната равенка $y' = y$ при почетен услов $y(0) = 1$ можеме да го добиеме со функцијата rk4 на следниот начин

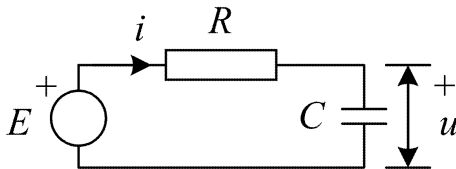
programi/rk4_primer1.m

```
1 clc; clear;
2 f = @(t, y) y;
3 [t, y] = rk4(f,0,4,1,8);
4 greska = (y(end)/exp(t(end)) - 1) * 100
5 plot(t, y, '--ko', t, exp(t), 'k');
```

само со 8 точки, $n = 8$, добиваме грешка од $-0,1\%$

Пример 3

Разгледуваме RC коло кое што е приклучено на генератор со константен напон E . Потребно е да го определиме и нацртаме временскиот тек на напонот $u(t)$ за следните бројни вредности $R = 1000 \Omega$, $C = 100 \mu\text{F}$ и $E = 12 \text{ V}$. Кондензаторот на почетокот бил празен.



$$E = u + Ri \quad i = C \frac{du}{dt}$$

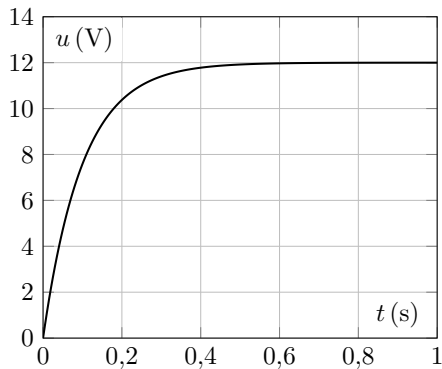
$$E = u + RC \frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{E - u}{RC}$$

Пример 3

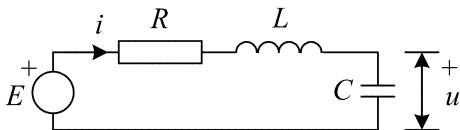
programi/rk_primer1.m

```
1 clc; clear
2 R = 1000; C = 100e-6; E = 12;
3 RC = @(t,y) (E - y) / (R*C);
4 [t, y] = rk4(RC, 0, 1, 0, 200);
5 plot(t, y);
```



Пример 4

Разгледуваме RLC коло кое што е приклучено на генератор со константен напон E . Потребно е да ги определиме и нацртаме временскиот тек на напонот $u(t)$ и струјата $i(t)$ за следните бројни вредности $R = 3,6 \Omega$; $L = 0,57 \text{ H}$; $C = 100 \mu\text{F}$ и $E = 12 \text{ V}$. Кондензаторот на почетокот бил празен, а струјата во калемот била еднаква на нула.



$$E = u + Ri + L \frac{di}{dt} \quad i = C \frac{du}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - Ri - u}{L}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{E - Ry_1 - y_2}{L},$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{y_1}{C}$$

$$y_1 = i \quad \text{и} \quad y_2 = u$$

Пример 4

programi/rk_primer2.m

```
1 clc; clear
2 R = 3.6; L = 0.57; C = 100e-6; E = 12;
3 RLC = @(t,y) [(E - R*y(1) - y(2))/L; y(1)/C];
4 [t, y] = rk4(RLC, 0, 1, [0 0], 1000);
5 plot(t,y);
```

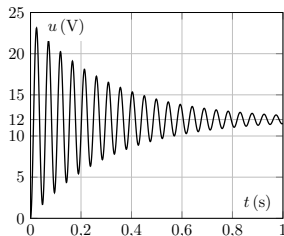
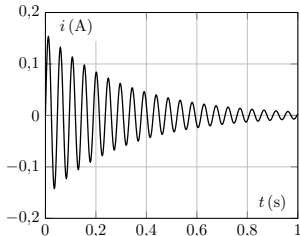
```
>> [ymax, ind_max] = max(y)
```

```
ymax =
    0.1531    23.1264
```

```
ind_max =
     13     25
```

```
>> t(ind_max)
```

```
ans =
    0.0120
    0.0240
```



Пример 4

максимална брзина на менување на напонот

```
>> [ymax, ind_max] = max(y(:,1)/C)
ymax =
    1.5305e+03
ind_max =
     13
>> t(ind_max)
ans =
    0.0120
```

напонот најбрзо се менува во $t = 0,012$ s со стапка на промена од 1.530,5 V/s

Пример 5

Го разгледуваме системот од задачата 5.5 од учебникот. Во тој систем настанала трифазна куса врска на еден од водовите во непосредна близина на прекинувачот P_2 . Во задачата се разгледуваат три различни режими на работа на генераторот и соодветно на тоа имаме три аглови карактеристики на моќност $P_e(\theta) = P_{Mi} \cdot \cos \theta$

1. нормален работен режим со $P_{M1} = 2, 26$ pu,
2. режим на трифазна куса врска со $P_{M2} = 0$,
3. режим на работа по исклучувањето на кусата врска, кога повредениот вод е исклучен $P_{M3} = 1, 603$ pu.

Да се нацртаат кривите $\theta(t)$ и $f(t) = 50 + \Delta\omega(t)/18.000$ за следните два случаја

- а) кусата врска се исклучува по 0, 15 s,
- б) кусата врска се исклучува по 0, 17 s.

За генераторот е познато дека пред настанувањето на кусата врска работел со моќност $P_0 = P_{meh} = 1$ pu. Исто така, е позната константата на инерција $M = 3, 7 \cdot 10^{-4}$ pu.

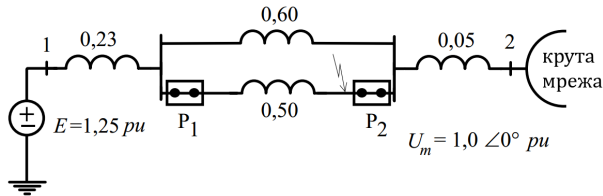
Пример 5

За анализата да се користи наједноставниот механички модел на генератор кој е даден со следните две диференцијални равенки.

$$\frac{d(\Delta\omega)}{dt} = \frac{P_m - P_e(\theta)}{M},$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta\omega,$$

каде што со $\Delta\omega$ е означена промената на аголната брзина на вртење во однос на номиналната.

Забелешка: $\Delta f = \Delta\omega/18.000$ затоа што во задачата аглите се изразени во електрични степени, а не во радијани (инаку би било $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$) – при $f = 50 \text{ Hz}$ роторот прави $50 \cdot 360 = 18.000$ електрични степени во секунда.

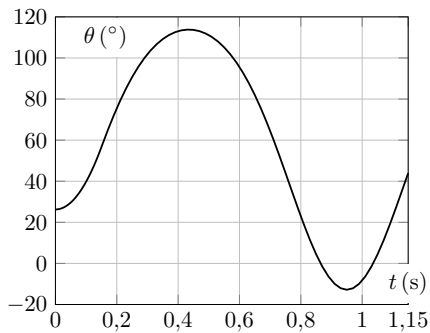
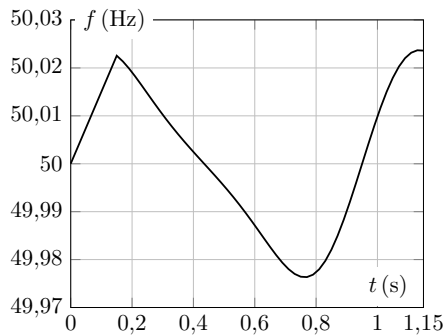


Пример 5а

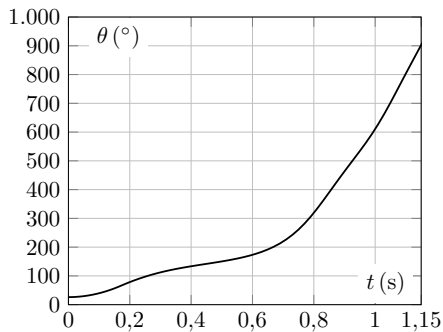
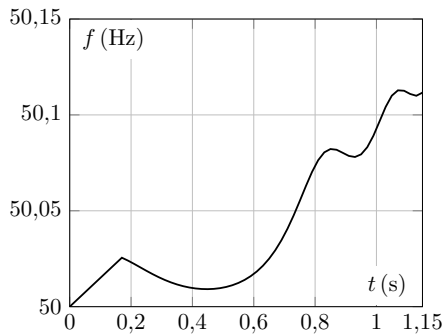
programi/rk_primer3.m

```
1 clc; clear
2 Pmeh = 1; Pm1 = 2.26; Pm2 = 0; Pm3 = 1.603; M = 3.7e-4;
3 t_iskl = 0.15;
4 % y(1) = omega e izrazena vo elektricni stepeni vo sekunda
5 % y(2) = teta e izrazena vo elektricni stepeni
6 % rabota so rezim na kusa vrska od 0 do t_iskl
7 f = @(t,y) [Pmeh/M; y(1)];
8 [t, y] = rk4(f, 0, t_iskl, [0 asin(Pmeh/Pm1)/pi*180], 50);
9 % rabota so isklucen vod od 0 do 1 sekunda
10 f = @(t,y) [(Pmeh - Pm3*sin(y(2)/180*pi))/M; y(1)];
11 [t1, y1] = rk4(f, 0, 1, y(end,:), 50);
12 % dvete resenija staveni posledovatelno
13 t = [t; t1 + t_iskl];
14 y = [y; y1];
15 figure; plot(t, 50 + y(:, 1)/18000);
16 figure; plot(t, y(:, 2));
```

Пример 5а



Пример 56



Пример 6

Да се реши претходната задача така што во системот ќе се земе предвид и автоматско повторно вклучување на водот кај кој настанала кусата врска. Во тој случај, по настанувањето на кусата врска, симулацијата на системот да се направи во следните три работни режими

1. режим на трифазна куса врска кога е $P_{M2} = 0$ во траење од 0, 17 s,
2. режим на работа по исклучувањето на кусата врска, кога повредениот вод е исклучен при што е $P_{M3} = 1, 603$ pu во траење од 0, 2 s,
3. нормален работен режим по автоматско повторно вклучување на водот кога е $P_{M1} = 2, 26$ pu во траење од 1 s.

Да се нацртаат кривите $\theta(t)$ и $f(t) = 50 + \Delta\omega(t)/18.000$.

Пример 6

programi/rk_primer4.m

```
1 clc; clear
2 Pmeh = 1; Pm1 = 2.26; Pm2 = 0; Pm3 = 1.603; M = 3.7e-4;
3 t_iskl = 0.17; t_apv = 0.2;
4 % y(1) = omega e izrazena vo elektricni stepeni vo sekunda
5 % y(2) = teta e izrazena vo elektricni stepeni
6 % rabota so rezim na kusa vrska od 0 do t_iskl
7 f = @(t,y) [Pmeh/M; y(1)];
8 [t, y] = rk4(f, 0, t_iskl, [0 asin(Pmeh/Pm1)/pi*180], 50);
9 % rabota so isklucen vod od 0 do t_apv
10 f = @(t,y) [(Pmeh - Pm3*sin(y(2)/180*pi))/M; y(1)];
11 [t1, y1] = rk4(f, 0, t_apv, y(end,:), 50);
12 % rabota vo normalen rezim od 0 do 1 sekunda
13 f = @(t,y) [(Pmeh - Pm1*sin(y(2)/180*pi))/M; y(1)];
14 [t2, y2] = rk4(f, 0, 1, y1(end,:), 50);
15 % trite resenija staveni posledovatelno
16 t = [t; t1 + t_iskl; t2 + t_iskl + t_apv];
17 y = [y; y1; y2];
18 figure; plot(t, 50 + y(:, 1)/18000);
19 figure; plot(t, y(:, 2));
```

Пример 6

